

Per una teoria geometrica delle funzioni: le lezioni di Felix Klein a Leipzig

a cura di

Maria Rosaria Enea

Volume pubblicato con il contributo del

Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica nell'ambito PRIN 2009

(Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia – Università degli Studi della Basilicata)

Indice

Presentazione

p.

Parte I: Felix Klein a Leipzig

Le prime tappe della carriera accademica di Felix Klein	p.
La chiamata di Felix Klein a Leipzig: punti essenziali del discorso inaugurale	p.
Il Seminario Matematico e la Collezione dei Modelli	p.
Le attività di Klein a Leipzig: lezioni, seminari, dottorandi e assistenti	p.
La teoria delle funzioni di Riemann	p.
La corrispondenza Klein-Poincaré: il <i>Grenzkreistheorem</i>	p.
Einleitung in die geometrische Funktionentheorie : i manoscritti e le lezioni	p.
Appendice 1	p.
Scheda biografica di Christian Felix Klein	
Appendice 2	p.
Discorso Inaugurale: <i>Sopra le relazioni della nuova matematica con le applicazioni</i>	
Parte II: Teoria geometrica delle funzioni	p.
(Traduzione in italiano, a cura di Francesco Gerbaldi, delle lezioni tenute da F. Klein a Leipzig nel semestre invernale 1880-81)	
Bibliografia	p.
Indice dei nomi	p.

Presentazione

Nel 1891 Ernesto Cesàro chiede all'amico e collega Francesco Gerbaldi¹ di tradurre per lui, dal tedesco, le lezioni tenute da Felix Klein a Leipzig nel primo semestre del 1880-81, *Einleitung in die geometrische Funktionentheorie* [Introduzione alla teoria geometrica delle funzioni].

Gerbaldi conosceva bene il tedesco, era infatti uno dei tanti giovani ricercatori italiani che avevano trascorso lunghi periodi di perfezionamento all'estero: nel 1882-83 aveva seguito a Leipzig proprio le lezioni di Klein e a Berlino quelle di Kronecker e Weierstrass.

Non era la prima volta che Gerbaldi traduceva testi o manoscritti di Klein dal tedesco in italiano: abbiamo infatti notizia, da una lettera di Corrado Segre a Klein, di una sua traduzione del *Programma di Erlangen* per Enrico D'Ovidio².

Della traduzione del *Funktionentheorie* per Cesàro abbiamo invece notizia attraverso la corrispondenza dello stesso Gerbaldi:

Cariss.^{mo} Prof. Cesàro,

Eccole un altro fascicolo della traduzione del Funktionentheorie del Klein. Questo fascicolo mi è costato maggior tempo e fatica del precedente per causa delle figure. Queste io feci colorate, quali ho visto a Leipzig, nel 1882, quando vi fui per il corso di perfezionamento. È naturale che nella litografia si rinunciasse ai colori; questi però, come Lei vedrà, per la natura delle questioni contribuiscono all'intelligenza del testo; il Klein, alle cui lezioni ho assistito, non isdegnava servirsene in iscuola e possedeva appositamente del gesso di vari colori.

*Io sono arrivato nella traduzione a pag 128 della litografia la quale ha in tutto 276 pag; la fig. a pag. 72 non si trova in essa, si trova invece nei miei manoscritti perché questo Corso del Klein io me lo ero copiato tutto nel 1882; il guaio è che il mio lavoro d'allora non serve per gli altri giacché le mie carte sono stenografate. [...]*³

L'interesse di Cesàro per un corso di analisi complessa, quale fu quello tenuto da Klein, è sicuramente legato alle sue ricerche in Teoria dei Numeri.

Che Cesàro non conoscesse, o per lo meno non amasse usare, l'analisi complessa appare chiaro nella sua nota *Sulla distribuzione dei numeri primi*⁴ del 1896, dove affronta il problema della ripartizione dei primi nelle progressioni aritmetiche $4x + 3$ e $4x + 1$.

Nel 1853 Tchébychef⁵ in una lettera a Fuss riferiva di avere osservato nei suoi studi⁶ su $\pi(x, 4, 3)$ e $\pi(x, 4, 1)$ che « *Si de la totalité des nombres premiers de la forme $4n + 3$, on retranche celle des nombres premiers de la forme $4n + 1$ et que l'on divise ensuite cette différence par la quantité $\sqrt{x}/\log x$, on trouvera plusieurs valeurs de x telles que ce quotient s'approchera de l'unité aussi près qu'on le voudra* ».

¹ Nell'anno accademico 1890-91 Ernesto Cesàro e Francesco Gerbaldi, erano entrambi docenti dell'Università di Palermo, il primo di Analisi algebrica il secondo di Geometria analitica. Si veda [Enea 2013].

² La lettera datata 28 Novembre 1889 è pubblicata in [Luciano & Roero 2012].

³ Lettera di Gerbaldi a Cesàro del 20 dicembre 1892, pubblicata in [Enea 2013].

⁴ Si veda [Cesàro 1896].

⁵ Si veda [Tchébychef 1853].

⁶ Con $\pi(x, M, N)$ si indica il numero dei primi inferiori a x contenuti nella progressione aritmetica $My + N$ cioè congrui a M modulo y .

Egli tuttavia non dava giustificazione delle sue osservazioni. La congettura di Tchébychef venne dimostrata nel 1891 da Phragmén⁷ con un vasto uso della teoria di variabile complessa (si osservi che è proprio l'anno in cui Cesàro chiede la traduzione a Gerbaldi).

Più tardi Cesàro, nella sua nota *Sulla distribuzione dei numeri primi*, si propose di riaffrontare la questione allo scopo di evitare l'uso della variabile complessa, infatti nell'introduzione scrive:

Rigorosissima è, senza dubbio, la più recente dimostrazione, di pura filiazione riemanniana, data da Phragmén nelle Memorie dell'Accademia di Stockholm; ma noi teniamo a far vedere, con questa e con ulteriori comunicazioni, che il campo delle quantità reali può bastare a sé stesso per la scoperta delle proprie leggi asintotiche.

Cesàro incorrerà però in alcune inesattezze che saranno segnalate nel 1902 da Landau⁸. Occorre ricordare che Cesàro⁹, nel periodo della sua formazione in Belgio, aveva lavorato intensamente, ma senza però seguire regolarmente nessun corso speciale e completo di matematica, né aveva studiato i trattati classici che avrebbero potuto allargare i suoi orizzonti matematici. Non ebbe allora nessun consiglio in questo senso, anzi alla sua richiesta di rivedere gli elementi di analisi, il suo maestro Catalan gli rispose che non era necessario: Catalan provava una gran soddisfazione nel vedere il giovane italiano produrre ricerche assolutamente originali, soprattutto in Teoria dei numeri, senza alcun suggerimento, basandosi solo sul suo geniale intuito.

Il lavoro che qui presentiamo prende le mosse proprio dalla traduzione italiana del *Funktionentheorie*, fatta da Gerbaldi, conservata nel Fondo Cesàro a Napoli e qui trascritta. L'interesse storico del materiale che pubblichiamo, per la prima volta in una lingua diversa dal tedesco, è giustificato dal legame che queste lezioni hanno con quelli che furono, come osserva lo stesso Klein, i migliori risultati della sua produzione scientifica, i *teoremi di uniformizzazione*, chiavi di volta nella teoria delle *funzioni automorfe* nell'ambito della teoria generale delle funzioni di variabile complessa di Bernhard Riemann. A far da retroscena a queste ricerche fu la *friendly rivalry* con Poincaré.

Prendendo spunto da tutto ciò abbiamo voluto raccontare anche una parte, poco conosciuta fuori dalla Germania, della vita di Klein: il suo arrivo all'Università di Leipzig, le innumerevoli attività didattiche e seminariali qui organizzate e la creazione di un *Seminario Matematico*. Ci soffermeremo anche su alcuni aspetti del discorso inaugurale, incentrato sul rapporto della matematica con le applicazioni, la cui traduzione in italiano è riportata in appendice.

⁷ Si veda [Phragmén1891].

⁸ Landau mosse delle obiezioni sia sulla valutazione di $\pi(x, 4, 3)$ e $\pi(x, 4, 1)$ data da Cesàro sia sulla generalizzazione che di tale valutazione diede Gabriele Torelli. Si vedano [Carbone, Nastasi, Palladino 1996] e [Carbone, Enea, Gatto 2011].

⁹ Si veda [Perna 1907].

Criteri di edizione

Il manoscritto di Gerbaldi è conservato in buono stato, ciò ne ha reso agevole la lettura e la trascrizione. I criteri adottati per la trascrizione mirano a rispettare il più possibile il testo originale sia nella grafia, sia nella punteggiatura. Si sono pertanto mantenuti termini oggi desueti, ma in uso all'epoca, mentre sono stati corretti piccoli errori ortografici.

Sono state riportate le annotazioni di Gerbaldi e le note di Klein indicate, come nell'originale manoscritto tedesco, con un asterisco. Accanto a queste sono state inserite delle note della curatrice. Alla trascrizione del manoscritto ha collaborato Lucrezia Scialpi.

Ringraziamenti

Sono particolarmente riconoscente a Martin Funk (professore di Geometria nell'Università degli Studi della Basilicata) per avermi aiutato nel difficile lavoro di traduzione dal tedesco e per le lunghe e fruttuose conversazioni.

Ringrazio Pietro Nastasi per avermi, come sempre, sostenuta nelle mie ricerche.

Parte I

Felix Klein a Leipzig

Le prime tappe della carriera accademica di Felix Klein

La carriera accademica di Felix Klein¹⁰ comincia, come libero docente, a Göttingen nel semestre estivo del 1872. Nell'autunno di quello stesso anno, grazie alla mediazione di Clebsch¹¹, diviene professore ordinario di Matematica presso l'Università di Erlangen.

Già a quel tempo Klein conosceva bene tutti i centri matematici più importanti della Germania e le loro ricerche, quindi non è un caso se le “*Considerazioni comparative sulle recenti ricerche geometriche*”, il cosiddetto “*Programma Erlangen*”, fu il contenuto¹² del suo discorso inaugurale, che doveva obbligatoriamente tenere in occasione della sua presa di servizio in qualità di professore.

Il problema principale del suo *Programma* fu da lui così formulato: “*È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni; studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato.*”

Si trattava quindi di sviluppare una teoria degli invarianti rispetto ad un gruppo dato.

Due sono gli aspetti che fanno del *Programma Erlangen* una pietra miliare nella storia della matematica: da un lato Klein ha contribuito con il *Programma* allo sviluppo della struttura del pensiero matematico del ventesimo secolo, poiché ha mostrato l'utilità del concetto di gruppo, emerso dalla teoria delle equazioni algebriche, anche in altri campi della matematica; dall'altro lato ha permesso di superare l'annosa e sterile polemica fra “scuole” geometriche.

Dopo la morte di Clebsch molti degli studenti di talento si erano spostati da Göttingen ad Erlangen, ma Klein non ebbe l'opportunità di sviluppare qui una sua “scuola”: i suoi corsi non furono mai seguiti da più di sette studenti. Il più importante allievo di questo periodo fu Ferdinand Lindemann, oggi noto soprattutto per la dimostrazione della trascendenza di π .

Nel semestre estivo del 1875 Klein accetta di trasferirsi alla Technische Hochschule di München, dove il suo primo corso, Geometria analitica, fu seguito da circa 207 studenti. Tra gli allievi che, nei cinque anni di permanenza a München, seguirono i suoi seminari e i suoi corsi (superiori) ricordiamo: Adolf Hurwitz, Walther von Dyck, Karl Rohn, Carl Runge, Max Planck, Luigi Bianchi e Gregorio Ricci-Curbastro.

A München Klein continuò a portare avanti gli studi cominciati ad Erlangen. In connessione al *Programma*, la visualizzazione geometrica divenne il focus della sua ricerca. Gli aspetti essenziali di queste complesse ricerche, strettamente correlati fra loro, erano:

1. i modelli matematici
2. la topologia
3. l'interpretazione geometrica degli integrali abeliani.

Klein aveva iniziato un lavoro sui gruppi di sostituzioni e sulla teoria delle equazioni, che proseguì a München legandolo con le funzioni ellittiche e le funzioni modulari. È partendo da queste ricerche, che arriva al culmine della sua creatività matematica, ovvero alla teoria delle funzioni automorfe.

¹⁰ Per una biografia completa di Felix Klein rimandiamo a [Nastasi 2000]. Si veda anche Appendice 1.

¹¹ Alfred Clebsch (1833-1872) fu suo mentore e suo maestro, con lui conseguì nel 1872 l'Abilitazione (Libera Docenza).

¹² Questo era in effetti anche il titolo della lezione inaugurale: “*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*”. Si vedano [Nastasi 2000], [Rowe 1983], [Rowe 1985] e [Magnani & Dossena 2004].

Su tutte queste ricerche torneremo più avanti ma è importante osservare, come diceva lo stesso Klein, che *“nei suoi anni trascorsi a München aveva posto le basi di gran parte delle sue ricerche svolte più tardi”*¹³.

Nel 1880 Klein si trasferì a Leipzig. Come scrive Rowe¹⁴, Leipzig sembrava essere un eccellente avamposto per costruire il tipo di scuola che aveva in mente: una scuola che richiamava fortemente le abbondanti ricchezze offerte dall’approccio geometrico di Riemann alla teoria delle funzioni. Ma gli imprevisti e la sua sempre delicata salute cospiravano contro questo piano. In Klein c'erano due anime: una desiderosa di una vita tranquilla di studioso, l'altra di una vita attiva di editore, insegnante, organizzatore scientifico. Fu durante l'autunno del 1882 che la prima di queste due aspirazioni crollò a causa del collasso totale della sua salute. Nel corso degli anni 1883-1884, Klein fu afflitto da depressione.

La chiamata di Felix Klein a Leipzig: punti essenziali del discorso inaugurale

Dopo la morte di Möbius, nel 1868, come unico professore di matematica a Leipzig rimaneva Wilhelm Scheibner¹⁵.

Scheibner, originario di Gotha, aveva studiato a Bonn nel 1844 e dal 1845 fino al 1848 a Berlino con Jacobi e Dirichlet. Libero docente di matematica all’Università di Leipzig dal 1853, ne divenne professore ordinario nel 1867. I suoi vari interessi e la sua intelligente politica nei confronti del Ministero della Cultura e della Pubblica Istruzione giocarono un ruolo importante nello sviluppo della matematica a Leipzig, e in particolare nella chiamata di Klein in questa università.

Nel 1869 arrivò a Leipzig, come ordinario, Carl Neumann, uno dei maggiori rappresentanti della scuola di fisica-matematica di Königsberg. Quasi contemporaneamente arrivarono anche, come liberi docenti, più tardi professori straordinari¹⁶, Adolph Mayer e Karl von der Mühll.

Grazie a Neumann, Mayer e Mühll la fisica-matematica divenne nei decenni successivi uno dei temi centrali della ricerca e dei corsi all’Università di Leipzig.

Coperta l’analisi e la fisica matematica, rimaneva però vacante il settore che era stato rappresentato da Möbius, e in ogni caso quello più significativo per la ricerca matematica del XIX secolo: la geometria.

Scheibner cercò quindi di ottenere, non senza fatica, una nuova cattedra di geometria. Ad opporsi i colleghi della Facoltà di Filosofia, della quale facevano parte i matematici. Diplomaticamente Scheibner confrontò la situazione dei filologi con quella dei matematici, utilizzando l’argomento (sempre efficace) del numero degli studenti: per 399 studenti di filologia c’erano 13 cattedre da ordinario, 8 da straordinario nonché un professore onorario, mentre per i 186 studenti immatricolati per matematica c’erano 2 cattedre da ordinario e 2 da straordinario; persino a Göttingen per i 117 studenti di matematica c’erano 4 ordinari e uno straordinario. Queste argomentazioni ebbero successo: il 21 dicembre 1879 la Facoltà decise di presentare la relativa richiesta presso il ministero; nel rapporto veniva elencata tra l’altro l’offerta didattica per la matematica all’Università di Leipzig che prevedeva circa una dozzina di corsi di geometria che non potevano essere coperti. I professori

¹³ Si veda [Courant 1925].

¹⁴ Si veda [Rowe 1989].

¹⁵ Le principali fonti sull’Università di Leipzig, negli anni 1881-1886, sono [König 1981a], [König 1981b] e [Thiele 2011].

¹⁶ Questa posizione corrisponde oggi in Italia a quella di professore associato.

candidati ad occupare la cattedra di geometria erano Felix Klein, al primo posto, e dopo di lui i suoi allievi Axel Harnack e Ferdinand Lindemann.

In [König 1981b] leggiamo la seguente nota su Felix Klein:

*“Noi ... chiamiamo ... in prima linea uno dei più famosi allievi del defunto Clebsch, il Dr. Felix Klein, Prof. ordinario al Politecnico di München, il quale sia attraverso i suoi numerosi lavori scientifici, sia attraverso la redazione dei *Mathematischen Annalen* ha acquistato straordinari meriti nell’ampio perfezionamento della nuova geometria, egli specialmente negli ultimi tempi mediante speculazioni geometriche è pervenuto a importanti risultati sopra la teoria delle equazioni algebriche e delle funzioni modulari, e si è distinto per la formazione di abili allievi.”*

La scelta di Klein, come primo candidato, non sorprende se si tiene conto che lui, Mayer, Mühl e Neumann erano tutti personalmente legati a Clebsch e coinvolti nell’edizione dei *Mathematischen Annalen*.

Felix Klein fu nominato professore dell’Università di Leipzig il primo ottobre del 1880 e il 25 ottobre tenne il suo pubblico discorso inaugurale, “*Sopra le relazioni della nuova matematica con le applicazioni*”¹⁷: obiettivo della sua esposizione era mettere in evidenza “il controproducente isolamento della matematica pura”, la grande distanza tra “la nuova matematica” e le sue applicazioni. La principale causa di questo allontanamento era, secondo Klein, la

“specializzazione troppo elevata dell’insegnamento universitario e la formazione, a ciò connessa, di scuole matematiche unilaterali. [...] Certamente è di grandissimo vantaggio per lo studente seguire lezioni specialistiche ed essere introdotto dal docente nella cerchia delle idee da lui autonomamente rappresentate. Ma accanto a queste lezioni, che possono essere considerate il compito più alto dell’insegnante accademico, non dovrebbero mancare altre che orientino in generale nell’ambito della matematica moderna, e che verifichino la connessione e la legittimità dei singoli sforzi. Con questo deperimento dell’insegnamento va, mano nella mano, la mancanza di manuali adatti. [...] Come potrebbero [gli studenti] in ambienti più generali utilizzare la nostra matematica moderna se lezioni e manuali mediano solo conoscenze insufficienti?”

Ecco, allora la proposta di Klein:

“Desideriamo in primo luogo produrre in noi stessi una conoscenza più ampia possibile delle discipline matematiche esistenti; questa dovrebbe poi senza ulteriori azioni, rilevarsi efficace nelle lezioni ed inoltre avere ripercussioni anche nella vita pratica! Certamente, non lo neghiamo, qui c’è un pericolo. Cioè che si insegni solo sapere enciclopedico anziché conoscenza matematica. Ma dovremmo rinunciare a realizzare un’impresa, solo perché ci sono delle difficoltà?”

Ma non è tutto,

¹⁷ Si veda qui Appendice 2.

“Supponiamo che tutte le difficoltà siano superate. In questo caso rimane alla maggior parte della matematica moderna sempre ancora un carattere che la rende difficilmente accessibile e ancora più difficilmente fruibile. È la sua elevata astrazione che dobbiamo combattere.”

Klein era dell'opinione, già espressa anni prima, che per evitare l'eccessiva astrazione era necessario “il passaggio tra i diversi strumenti di visualizzazione” che non solo devono essere auspicabili ma “da un punto di vista puramente geometrico devono essere addirittura pretesi, perché i teoremi devono essere resi immediatamente comprensibili.”¹⁸ Lui stesso aveva già in altre occasioni mostrato come la considerazione di correnti elettriche su superfici chiuse gli avessero permesso una migliore interpretazione degli integrali abeliani, così come dalla considerazione di vibrazioni sonore si potevano dedurre teoremi sulle equazioni differenziali del secondo ordine:

*“Io cerco con considerazioni fisiche di sviluppare una più intrinseca conoscenza dei concetti di fondo della teoria di Riemann ... Penso sia un'ingiustizia, che la maggior parte dei matematici reprimano le loro riflessioni intuitive e pubblichino solo le necessarie dimostrazioni rigorose. Io non ho avuto dubbi, nel rendere queste intuizioni fisiche addirittura il punto di partenza della mia rappresentazione”.*¹⁹

L'esperienza acquisita in questo senso a Erlangen e a München, permette a Klein di affermare nel suo discorso inaugurale:

“noi non ci riteniamo troppo aristocratici per utilizzare disegni e modelli in gran numero nell'insegnamento e anche nella propria ricerca.”

Torneremo a parlare di modelli matematici nel prossimo paragrafo.

Klein sa bene che il programma che si propone di realizzare è ampio, ma se correttamente sviluppato sarà certo utile agli studenti. E quindi, rivolgendosi ai colleghi presenti, conclude:

“Abbiano Lor Signori indulgenza e misurino non secondo la grandezza della singola prestazione, bensì secondo il piano e l'intento che giace sotto!”

Queste idee generali sui rapporti della matematica con le applicazioni saranno ribadite da Klein nel 1893 alla Northwestern University in America:

“È mia opinione che nell'insegnamento è non solo ammissibile – ma anche assolutamente necessario – che all'inizio si sia meno astratti; si deve anche fare costantemente ricorso alle applicazioni e accennare gradualmente alle raffinatezze man mano che lo studente diventi capace di comprenderle. Tutto ciò, naturalmente, non è un principio didattico di applicazione universale, da tenere presente in ogni istruzione scientifica.”

¹⁸ Si veda [Klein 1874 b].

¹⁹ Si veda [Klein 1921], vol. 3 pp. 502.

Si tratta della VI delle *Conferenze Americane*, dal titolo *Sul carattere matematico dell'intuizione dello spazio e sui rapporti delle Matematiche pure con le scienze applicate*, dove per la prima volta Klein tenta di chiarire meglio²⁰, la distinzione tra *intuizione ingenua*, “che manca di rigore”, e *l'intuizione raffinata*, che “trae piuttosto la sua origine dallo sviluppo logico di assiomi considerati come perfettamente rigorosi”: la prima la troviamo, per esempio, nel periodo della nascita del calcolo differenziale e integrale, la seconda in Euclide²¹.

Il Seminario Matematico e la Collezione dei Modelli

Appena arrivato a Leipzig, Klein presentò un'istanza per l'organizzazione di un “Seminario Matematico”²². Per questo richiese i locali del “Czermakschen Spektatorium”, fatto costruire dal fisiologo J.N. Czermak come laboratorio privato negli anni 1870-1872, e lasciato all'università dopo la sua morte.

Così già dal semestre estivo 1881 le lezioni di matematica non si tennero più nell'edificio centrale dell'università (l'Augusteum am Augustusplatz) bensì nello Spektatorium, trasformato in un edificio di aule per complessivi 400 posti. Alcune stanze laterali, che erano state ristrutturare secondo le direttive di Klein, ospitarono la sala di lettura e la biblioteca matematica:

“Una istituzione molto prestigiosa era la sala di lettura matematica, una creazione di Felix Klein. In due vani separati c'era una biblioteca delle opere ben scelte sulla letteratura fisico-matematica, comprese tutte le più importanti riviste. Ogni studente, mediante il pagamento di una piccola tassa, poteva ottenere una chiave²³, e dopo aveva la possibilità di trascorrere ore, eventualmente libere tra le sue lezioni, nella sala lettura, dove trovava tutti i suoi “attrezzi” messi insieme comodamente. A differenza della grande biblioteca universitaria c'era qui un vantaggio essenziale: ci si poteva avvicinare agli scaffali, sfogliare tutti i libri e scegliere quelli opportuni. Inoltre erano a disposizione gli elaborati della maggior parte delle lezioni in corso, cosicché si potevano recuperare una lezione o un passaggio perso. Anche i docenti si servivano volentieri della sala lettura per seguire la letteratura e per consultazioni. Così la sala lettura diventò il punto d'incontro naturale per tutti gli interessati alla matematica e alla fisica; anche se nei vani di questa sala lettura era vietato parlare, si trovavano occasioni nell'anticamera o nel corridoio per tutte le vivaci discussioni, che sembra essere un bisogno dei giovani matematici e fisici.”²⁴

Dopo dieci anni la biblioteca contava più di 1600 volumi, 300 trattati ed era abbonata a 40 riviste internazionali. Klein, direttore insieme con Mayer e Mühlh, si occupò di ogni dettaglio, anche dell'arredamento.

²⁰ Qui alcuni degli esempi dati sono tratti dalla teoria delle funzioni automorfe della quale parleremo più avanti.

²¹ Per questa parte rimandiamo il lettore a [Nastasi 2000].

²² Qui va inteso come Istituto di Matematica.

²³ Il piccolo contributo, versato da tutti i membri del Seminario, dava il diritto di usare i locali di lavoro e la biblioteca, i cui orari di apertura quotidiana erano di circa 12 ore (anche di domenica si poteva lavorare ma solo di mattina). Circa 1/3 degli studenti di matematica facevano parte del Seminario.

²⁴ Il brano è tratto dalla biografia di Carl Runge, scritta dalla figlia maggiore Iris. Si vedano [Runge 1949] e [Thiele 2011]

Ma gli ambienti del Czermakschen Spektatorium ben presto non bastarono più. Così i matematici, ancora su richiesta di Klein, il 12 dicembre 1882, ottennero per il Seminario il 2° piano del “Kleinen Fürstenkollegs” (nella Ritterstrasse). Le lezioni si tennero comunque ancora nello Spektatorium, dove si trovava anche la collezione dei modelli.

Proprio in occasione della sua presa di servizio a Leipzig, Klein aveva richiesto finanziamenti per l’acquisto di modelli matematici; richiesta che era stata accettata dal ministero nel novembre 1880. Abbiamo già accennato alla grande importanza che Klein dava ai modelli, per la didattica delle cosiddette “matematiche superiori” e per la ricerca²⁵. Fu proprio dietro iniziativa sua e di Alexander Brill che, nel 1875, erano stati istituiti, presso il Politecnico (Technische Hochschule) di München, laboratori di modellizzazione con gli studenti²⁶:

“Al Politecnico di questa città [München] è annesso un Istituto matematico, il quale si compone sin dal 1875 d’una Collezione, di una Biblioteca per i membri (Professori e studenti), del Seminario Matematico, e di un Atelier. La collezione conta oltre 500 modelli di Geometria superiore, Fisica-matematica e Meccanica. L’Atelier è fornito di congegni, apparati, torni per la costruzione di modelli in legno e gesso. Questi sono talvolta il risultato di ricerche speciali degli stessi Professori dei corsi superiori della Facoltà matematica e del Politecnico. Quando se ne è raccolto un certo numero, i migliori vengono consegnati ad una libreria, la quale s’incarica di farli dipingere e porli in vendita”²⁷.

La costruzione di modelli doveva essere, per Klein e Brill, parte integrante del piano di studi scolastico e universitario, giacché

“La varietà di queste forme stuzzica l’immaginazione, e la dimestichezza con essi attira anche persone ad interessarsi alla geometria, persone che non sono dotate di una visualizzazione spaziale, e stimola persone con talento a paragonare e riflettere”²⁸.

In Germania, grazie anche al Seminario Matematico di Göttingen e ai Politecnici di Darmstadt e Karlsruhe, la produzione di modelli acquistò ben presto un carattere industriale. La più attiva iniziativa imprenditoriale per la realizzazione di modelli e strumenti, fu quella fondata a Darmstadt nel 1877 da Ludwig Brill (fratello di Alexander), e continuata dal 1899 in poi da Martin Schilling, prima in Halle an der Salle e poi a Leipzig. Singoli opuscoli (a volte veri e propri saggi) contenenti la trattazione matematica che avevano portato alla realizzazione dei pezzi, accompagnavano l’uscita di una serie di modelli.

Varie pubblicazioni sui modelli e strumenti matematici seguirono ad importanti eventi celebrativi come l’*International Exhibition* di Londra del 1876 e il convegno della *Deutsche Mathematiker Vereinigung* a München nel 1893, in occasione del quale venne compilato da Walther von Dyck un

²⁵ Rimandiamo ancora al discorso inaugurale in Appendice 2.

²⁶ Tra i tanti brillanti studenti che a München parteciparono a tali laboratori ricordiamo: A. von Barunmühl (storico della matematica), W. Dyck (professore al Mathematisches Institut der technischen Hochschule di München), K. Rohn (professore alla Technischen Hochschule di Dresda), L. Schleiermacher (presidente del Museo granducale dell’Assia a Darmstadt), R. Diesel (ideatore del motore a combustione interna).

²⁷ Lettera di Giuseppe Veronese al Ministro della Pubblica Istruzione Guido Baccelli; conservata presso l’Archivio dell’Università di Padova (Rettorato n°761) e pubblicata in [Palladino 1999]. Su questa lettera ritorneremo dopo.

²⁸ Si veda [Brill 1889].

*Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*²⁹. Questo fatto associato ad un'efficace azione d'informazione, di cui furono artefici gli stessi scienziati, ma anche i borsisti che ritornavano dai loro soggiorni di studio in Germania, fecero sì che modelli e strumenti matematici si diffondessero anche in Europa e in America³⁰.

I modelli esistenti in Italia³¹ provengono quasi tutti dagli originali prodotti da Brill e Schilling³², alcuni furono realizzati in proprio dagli stessi studiosi per far fronte a specifiche esigenze didattiche o di ricerca. Nel novembre del 1883 Giuseppe Veronese, che aveva goduto, nel 1880-81, di un assegno di perfezionamento a Leipzig ed aveva avuto contatti con Klein, presentò una relazione (si veda nota 14), all'allora Ministro della Pubblica Istruzione Guido Baccelli, in cui descrive un progetto per allestire a Padova un laboratorio nazionale italiano (che non si realizzò) per la produzione di modelli, sulla base delle diverse esperienze europee già in atto, soprattutto quella tedesca:

“L'insegnamento delle Scienze deve rafforzarsi secondo i nuovi principi e le nuove verità che mano mano vanno arricchendo il patrimonio dell'umano sapere. È per questo che le proposte delle Scienze esatte creano continuamente nuovi bisogni all'insegnamento, cui fa uopo provvedere se si vuole che esso riesca veramente efficace. Fra questi bisogni c'è anche l'aumento del materiale scientifico. È necessario infatti che la parola del Professore sia sempre sussidiata da affermazioni pratiche, che diano all'esposizione di lui maggior chiarezza ed autorità, e acciocché le verità della Scienza rimangano maggiormente impresse nella mente dei giovani.

L'intuito in Geometria consiste nel rappresentarci alla nostra mente le figure dello spazio, in modo che il nostro pensiero possa addentrarsi in esse unendole e separandole a vicenda e scoprire il nesso intimo che tutte le compenetra. È questo intuito dello spazio che bisogna far sviluppare nella mente dei giovani fino ancora dalla loro più tenera età, ed a tal uopo è utile accompagnare ogni dimostrazione geometrica, per quanto possibile, con disegni e modelli mediante il quali il giovane possa meglio comprendere ed intuire le proprietà geometriche dei corpi senza tanti sforzi della mente. [...] Io credo che pel progresso sempre maggiore degli studi matematici in Italia, un Atelier come quello di München sarebbe da noi di grande giovamento, perché le nostre scuole si renderebbero indipendenti anche per questo dall'Estero, e potrebbero procurarsi le loro collezioni con minor spesa.

Una tale officina non avrebbe soltanto lo scopo di fabbricare dei modelli, ma anche di fare esercitare i giovani di Matematica e della Scuola d'Applicazioni per gli Ingegneri nella costruzione di essi, affinché potessero rendersi ragione col fatto di certe teorie complicate sviluppate in Scuola. “

²⁹ Si veda [Dyck 1892]. Si vedano anche [Schilling 1903] e [Schilling 1911].

³⁰ Si veda ad esempio la V delle *Conferenze Americane* di Klein, *La Teoria delle funzioni e la geometria*, in [Nastasi 2000].

³¹ Per un'ampia panoramica sulle collezioni di modelli conservati presso istituzioni italiane rimandiamo a [Palladino 2002].

³² Esistono alcuni modelli, per esempio all'Università di Padova, compresi in un catalogo, *Verzeichnis Mathematischer Modelle*, relativo ad una raccolta prodotta da Hermann Wiener al Politecnico di Darmstadt. Il padre di Hermann, Christian Wiener, aveva cominciato a costruire, già nel 1865 a Kalsruhe, modelli per la Geometria descrittiva. Esistono anche modelli in gesso prodotti a Parigi da Charles Muret e diffusi dall'editore Delagrave.

Questa iniziativa di Veronese era sostenuta da Brioschi, D'Ovidio³³, de Paolis, Dini e Bertini.

Le attività di Klein a Leipzig: lezioni, seminari, dottorandi e assistenti

Come abbiamo già detto, Klein aveva gettato le basi per le sue future ricerche scientifiche a München; la scuola di Leipzig può essere vista come continuazione diretta di quella di München.

Klein offrì, durante i suoi 11 semestri a Leipzig, 17 corsi diversi di 2 o 4 ore settimanali e tenne sempre un seminario di ricerca di 2 ore; il suo impegno didattico oscillava nei semestri tra 6 e 10 ore settimanali.

Le attività seminariali organizzate da Klein venivano tutte protocollate, i conferenzieri (studenti, dottorandi, assistenti) scrivevano nel protocollo il loro tema con vicino un riassunto, su cui Klein faceva occasionalmente delle osservazioni. Esistono ben 29 quaderni di circa 8.000 pagine contenenti notizie di tutti i seminari: dai primi, tenuti nel semestre estivo 1872 a Göttingen fino agli ultimi nel 1912. Il primo quaderno contiene i protocolli di Göttingen (SE 1872)³⁴, Erlangen (SE 1873 – SI 1874), München (SE 1875 – SI 1879). Nel secondo quaderno si trovano le ultime attività seminariali di München (SE 1880) e le prime di Leipzig (SI 1880). Ben quattro quaderni, dal terzo al sesto, documentano i seminari di Leipzig (rispett. SE 1881-SI 1882; SE 1882-SI 1883; SE 1883-SI 1884; SE 1884-SI 1885). Gli altri quaderni contengono i restanti seminari di Göttingen. Si osservi come nel tempo i riassunti divengano sempre più estesi!

Indipendentemente dal numero dei partecipanti, il numero di conferenze per attività seminariale (quindi per semestre) oscillava da 12 a 24. A volte gli stessi argomenti furono presentati in più conferenze. Mentre i primi seminari non seguivano ancora linee tematiche fisse, a Leipzig le attività seminariali per semestre erano a tema; infatti Klein coinvolse sempre di più la propria ricerca, ovvero trattò principalmente temi di teoria delle funzioni e teoria dei gruppi.

Il numero dei partecipanti alle attività seminariali era inizialmente basso, crebbe nel tempo e si arricchì anche di studenti stranieri in particolare svizzeri, francesi, italiani, inglesi e americani.

I seminari, le esercitazioni e i cosiddetti Kolloquium³⁵ accompagnavano sistematicamente le lezioni di Klein, che furono quasi tutte redatte per iscritto e messe a disposizione degli studenti in biblioteca o in sala lettura³⁶.

La seguente tabella dà conto dei corsi e dei seminari di tutto il periodo trascorso a Leipzig (anche nei periodi di congedo per malattia, quando veniva sostituito dai suoi assistenti):

Semestre invernale 1880/81

Rappresentazione geometrica della teoria delle funzioni I	4h
Seminario sulla geometria e la teoria delle funzioni	2h

Semestre estivo 1881

Geometria analitica del piano e dello spazio	4h
--	----

³³ Torino fu, grazie ad Enrico d'Ovidio negli anni del suo mandato di rettore (1880-1885), tra le prime sedi universitarie a dotarsi delle raccolte di modelli matematici. È in questo periodo, 1881-82, che Gerbaldi, allievo di d'Ovidio, si reca a Leipzig da Klein. Si veda [Giacardi 2004], [Enea 2013].

³⁴ Per comodità useremo l'abbreviazione SE per Semestre Estivo e SI per Semestre Invernale.

³⁵ In effetti erano *mathematisches Kränzchen*, formula inventata da Klein a München per migliorare i rapporti tra Politecnico e Università. Si trattava di incontri tra matematici, più in generale scienziati, per seguire una conferenza, preceduti da un momento di socializzazione in cui si potevano gustare dei pasticcini con una buona tazza di caffè o tè. Questa consuetudine (piacevolissima) è in uso ancora oggi nelle università tedesche.

³⁶ Molti sono ancora oggi reperibili nella sezione manoscritti dell'Istituto Matematico dell'Università di Göttingen. Qui si trovano anche appunti delle lezioni di Klein (scritti da lui).

Rappresentazione geometrica della teoria delle funzioni II	4h
Seminario sulla geometria e la teoria delle funzioni	2h
Semestre invernale 1881/82	
Geometria proiettiva I	4h
Geometria descrittiva I	2h
Relative esercitazioni (tenute da Dyck)	2h
Seminario sulla teoria delle funzioni (Klein parla lui stesso del suo lavoro <i>Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale</i>)	2h
Semestre estivo 1882	
Geometria proiettiva II	4h
Geometria descrittiva II	2h
Relative esercitazioni (tenute da Dyck)	2h
Funzioni univoche con trasformazioni lineari in sé (dal 6 giugno)	2h
Seminario sulla teoria delle funzioni e serie di Fourier	2h
Semestre invernale 1882/83	
Applicazione del calcolo differenziale e integrale alla geometria (fino a Natale tenuta da Dyck)	4h
Relative esercitazioni (tenute da Dyck)	2h
Seminario sulle funzioni iperellittiche, abeliane e sulle funzioni Theta (solo fino a Natale)	2h
Semestre estivo 1883	
Teoria delle equazioni, in particolare di 5 grado (fino a Pentecoste)	4h
Seminario sulle equazioni differenziali lineari e sulle funzioni ipergeometriche (tenuto da Dyck)	2h
Semestre invernale 1883/84	
Funzioni ellittiche I	4h
Seminario sulla teoria delle funzioni elementare	2h
Semestre estivo 1884	
Funzioni ellittiche II	4h
Seminario sulle funzioni ellittiche	2h
Semestre invernale 1884/85	4h
Curve algebriche superiori e superfici	4h
Seminario sulla teoria delle funzioni ellittiche (Klein parla più volte lui stesso sulle curve ellittiche normali)	2h
Semestre estivo 1885	
Geometria analitica del piano e dello spazio	4h
Funzioni iperellittiche I	2h
Seminario sulle funzioni algebriche e i loro integrali	2h
Semestre invernale 1885/86	
Calcolo differenziale e integrale	4h
Funzioni iperellittiche II	2h
Seminario sulle funzioni iperellittiche e le superfici di Kummer	2h

Il Klein docente viene ben descritto, in un paragone con Hilbert, da Max Born nella sua autobiografia³⁷:

“Nell’organizzazione generale le lezioni di Klein e di Hilbert erano molto diverse: Hilbert era come una guida alpina che portava una persona alla cima sulla via più corta e sicura, mentre Klein era come un principe (Prinz), che vuole dimostrare la grandezza del suo impero agli ammiratori, guidandoli su sentieri infinitamente tortuosi attraverso terreni apparentemente impenetrabili e si ferma su ogni piccola collina per dare una sintesi sul cammino fatto. Io diventai impaziente con questo procedere e volevo arrivare in cima rapidamente. Pertanto preferii Hilbert. Oggi il mio gusto è cambiato. Se mai ho tempo di leggere un trattato matematico solo per mio piacere, allora prendo uno dei libri di Klein ... e godo in essi come in un’opera d’arte, un grande romanzo o una biografia.”

È ben noto che Klein aveva la capacità di riconoscere le parti comuni di problemi in apparenza distanti tra loro, e l’arte di comunicare queste conoscenze all’ascoltatore attraverso un insieme di dettagli. Al contrario sembra che egli non abbia mai avuto la pazienza di garantire attraverso precise dimostrazioni logiche le proposizioni della cui correttezza si era convinto.

Le lezioni, come i seminari, di Klein erano comunque preparate meticolosamente: nei suoi appunti annotava perfino dettagli come “*sulla lavagna sinistra*” oppure “*qui non tratteggiare*”. Grande cura metteva anche nella stesura della bibliografia.

Il successo delle attività che si tennero a Leipzig in questo periodo, non solo sotto la guida di Klein³⁸, può essere misurato prendendo come indicatore il numero degli studenti di dottorato (*Promotionen*): dal 1873 al 1880 conseguirono il dottorato 8 studenti; dal 1881 al 1888 questo numero salì a 39. Klein fu relatore di 27 tesi di dottorato, e per ben 16 volte fu primo relatore (*Doktorvater*), cioè fu lui ad assegnare allo studente l’argomento della tesi, e a seguire tutto il lavoro di ricerca fino alla stesura dell’elaborato finale.

Riportiamo di seguito i nomi di questi 16 dottorandi, indicando anche il titolo della tesi, il correlatore e l’eventuale rivista in cui fu pubblicato un estratto della tesi:

1880

-Joseph Gierster³⁹: I sottogruppi del gruppo di Galois di equazioni modulari per il caso di trasformazioni di grado un numero primo. Relatori: Klein, Scheibner (*Mathematische Annalen*, v. 18).

1881

-Adolf Hurwitz: I fondamenti di una teoria indipendente delle funzioni ellittiche modulari e teoria delle equazioni dei moltiplicatori di 1° grado. Relatori: Klein, Scheibner (*Mathematische Annalen*, v. 18).

-Otto Staude: Sopra le equazioni lineari in coordinate ellittiche. Relatori: Klein, Scheibner.

1882

³⁷ Max Born, Premio Nobel per la Fisica nel 1954, conobbe Klein a Göttingen durante i suoi studi ed ebbe modo di frequentarlo anche più tardi come collega. Si veda [Born 1975] e [Thiele 2011].

³⁸ Tra le attività organizzate da Klein occorre segnalare anche un seminario che si tenne in collaborazione con l’Università di Halle, e che aveva decisi sostenitori in Georg Cantor, Felix Hausdorff e Hermann Grassmann junior.

³⁹ Gierster aveva cominciato il lavoro con Klein già a München.

-Ernst Lange: I 16 punti di flesso comuni agli spazi di curve del 4° ordine, 1ª specie. Relatori: Klein, Scheibner (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, v. 28).

1883

-Guido Weichhold: Sopra superfici di Riemann simmetriche e moduli di periodicità degli integrali normali abeliani associati di 1ª specie. Relatori: Klein, Neumann (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, v. 28).

1885

-Friedrich Dingeldey: Sopra la creazione di curve di ordine 4 attraverso meccanismi di movimento. Relatori: Klein, Neumann.

-Ernst Fiedler: Sopra una particolare classe di equazioni modulari irrazionali di funzioni ellittiche. Relatori: Klein, Scheibner.

-Otto Fischer: Applicazioni conformi tra triangoli sferici attraverso funzioni algebriche. Relatori: Klein, Scheibner.

-Paul Domsch: Sopra la rappresentazione delle superfici del 4° ordine con coniche doppie per mezzo di funzioni ellittiche. Relatori: Klein, Scheibner.

1886⁴⁰

-Burchard Henry Fine: Sopra le singolarità di curve di curvatura doppia. Relatori: Klein, Neumann. (*American Journal of Mathematics*, v. 8)

-Robert Fricke: Sopra sistemi di funzioni modulari ellittiche di grado basso. Relatori: Klein, Neumann.

-George Friedrich: Le equazioni modulari dei moduli di Galois di grado da 2 a 5. Relatori: Klein, Scheibner.

-Paul Nimsch: Sopra i periodi degli integrali ellittici di 1 e 2 specie come funzioni degli invarianti razionali. Relatori: Klein, Scheibner.

1887

-Paul Biedermann: Sopra le equazioni di grado superiore dei moltiplicatori delle funzioni ellittiche. Relatori: Klein, Scheibner.

-Richard Olbricht: Studio sulle funzioni sferiche e cilindriche. Relatori: Klein, Scheibner. (*Nova Acta der Carolingisch-Leopoldinischen Akademie in Halle*, v. 52).

-Wilibald Reichardt: Sopra la rappresentazione delle superfici di Kummer attraverso funzioni iperellittiche. Relatore: Klein. (*Nova Acta der Carolingisch-Leopoldinischen Akademie in Halle*, v. 50).

Sempre a Leipzig, conseguirono con Klein la libera docenza (*Habilitationen*):

1882

-Walther von Dyck: Studio della teoria dei gruppi (*Mathematische Annalen*, 20 (1882), pp. 1-44, 22 (1883), pp.70-108).

1885

-Friedrich Engel: Sopra l'equazione di definizione dei gruppi continui di trasformazioni (*Mathematische Annalen*, 27 (1886), pp.1-57).

-Eduard Study: Sopra la geometria delle coniche (*Mathematische Annalen*, 27 (1886), pp.58-101).

Assistente di Klein fu in un primo momento Walther von Dyck, dal SE 1881 al SI 1883/84, che aveva conseguito con lui anche il dottorato a München. Dyck era anche assistente per la Collezione

⁴⁰ Anche i lavori indicati per gli anni 1886-87 furono scritti e presentati quando Klein era a Leipzig.

dei Modelli ed incaricato di acquistare sempre nuovi pezzi per essa. Successore di Dyck , dal SE 1884 al SI 1885/86, fu Friedrich Schur, che aveva conseguito il dottorato con Kummer a Berlino nel 1879. Klein si serviva per le sue attività anche di una collaborazione studentesca che cambiava ogni anno ed era scelta fra i dottorandi. Per tutti i suoi collaboratori Klein aveva previsto una retribuzione, cosa oggi usuale ma all'epoca completamente nuova⁴¹.

Riportiamo, a proposito del rapporto tra Klein e i suoi assistenti, quanto scritto da Constantin Caratheódory, nel suo necrologio sul *München-Augsburger Abendzeitung* nel 1925:

*“Degli assistenti di Klein, che all’inizio cambiarono ogni anno, la maggior parte sono ritenuti e diventati prestigiosi ricercatori. Meritevole di ammirazione era la sicurezza con la quale Klein indovinava la scelta tra i suoi uditori per questo posto di fiducia; ancora più memorabile l’arte con la quale da ciascuno di questi giovani, a secondo del tipo di ingegno, otteneva il massimo rendimento, e questo non pregiudicando lo sviluppo della personalità degli interessati, bensì favorendolo. Questa massima saggezza, che in nessuno dei casi che io conosco ha fallito, è la chiave per la comprensione della straordinaria influenza, che Klein ha esercitato sull’insegnamento, il mantenimento e lo sviluppo della matematica in Germania.”*⁴²

A questo punto, avendo citato quasi tutti i protagonisti della vita universitaria a Leipzig, è più facile comprendere lo schema complessivo delle lezioni che concorrevano alla formazione matematica degli studenti.

In generale i corsi a Leipzig erano strutturati in “elementari” e “speciali”. Tra i corsi elementari per il primo semestre venivano regolarmente svolti:

- Calcolo differenziale e integrale, tenuto per lo più da Mayer e Mühlh ma anche da Scheibner, Karl Rohn⁴³ e Schur. Nel semestre estivo veniva tenuto un corso di introduzione all’analisi e dopo nel successivo semestre invernale un corso di calcolo differenziale e integrale.
- Geometria analitica e descrittiva, tenuto da Klein, Rohn, Dyck e in particolare da Schur. Klein teneva ogni semestre estivo un corso di introduzione alla geometria analitica.
- Meccanica analitica, tenuto sempre nel semestre invernale da Mayer o da Mühlh (raramente da Neumann).
- Algebra lineare e lezioni sui determinanti, tenuto ad intervalli non regolari da Mayer o Scheibner.

Tutte questi corsi, a cui erano associate anche esercitazioni, arrivarono ad avere anche tra 60 e 70 uditori.

Neumann partecipò poco allo svolgimento delle lezioni elementari. Tenne lezioni solo su ambiti speciali, spesso in continuazione per tre semestri, come teoria del potenziale, elettrostatica e idromeccanica. Ma anche altri professori e liberi docenti tennero corsi speciali, spesso sopra i loro ambiti di ricerca. Così Mayer faceva lezione sulla teoria delle equazioni differenziali e calcolo delle variazioni, Scheibner sulla teoria delle perturbazioni e funzioni Gamma (in connessione con serie ipergeometriche), Klein, come abbiamo visto, sulla teoria delle funzioni, Mühlh sulla teoria matematica della luce e la teoria meccanica del calore, Rohn sulla geometria e la teoria degli

⁴¹ Per il posto di assistente la retribuzione era statale.

⁴² Si veda anche [Thiele 2011].

⁴³ Karl Rohn allievo di Klein a München, conseguì con lui il dottorato nel 1878, e l’anno successivo la libera docenza. L’argomento delle sue ricerche è le superfici di Kummer di ordine quattro e le loro relazioni con le funzioni ellittiche. Seguì Klein all’Università di Leipzig e nel 1884 ne diventò professore straordinario.

invarianti, Dyck sulla la teoria dei gruppi e Schur sulla geometria sintetica. Lezioni sulla teoria dei numeri furono tenute da Scheibner e di Schur.

La teoria delle funzioni di Riemann

Klein aveva cominciato a lavorare alle idee di Riemann nel 1874, pubblicando dei lavori che mostravano come visualizzare le superfici di Riemann in un modo più intuitivo⁴⁴. Avendo ben chiaro quanto importanti fossero le idee di Riemann per lo sviluppo della teoria delle funzioni complesse, sebbene il suo “incarico didattico a Leipzig era espressamente limitato alla geometria”, Klein colse l’opportunità per approfondire le sue ricerche iniziando con un corso di teoria delle funzioni. Nella sua autobiografia⁴⁵ scrive:

« Ho considerato però il termine Geometria non solo riduttivamente, come la scienza degli oggetti spaziali, ma come un modo di pensare che può usarsi utilmente in tutti i campi della Matematica. Così, malgrado parecchie opposizioni, cominciai il mio insegnamento a Leipzig con una lezione sulla teoria geometrica delle funzioni, in cui sviluppavo le idee di cui mi ero occupato a München. Ebbi così la felice sensazione di poter sviluppare ulteriormente le idee di Riemann sulla teoria delle funzioni, la cui portata mi appariva sempre più chiara. A poco a poco, a queste ricerche prese parte un numero crescente di brillanti giovani matematici venuti a Leipzig dalla Germania e dall’estero. L’interesse per il nostro lavoro aumentò ancora più sensibilmente quando, a Parigi, H. Poincaré (con il quale entrai in corrispondenza) cominciò a pubblicare dal febbraio 1881 i suoi lavori su argomenti analoghi.»

Le più importanti fonti riemanniane per Klein erano la tesi di dottorato, scritta sotto la direzione di Gauss nel 1851, intitolata *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*⁴⁶ (Fondamenti di una teoria generale delle funzioni di una variabile complessa), e il lavoro, *Theorie der Abel’schen Functionen*⁴⁷, del 1857 sulle funzioni abeliane. Questi lavori, che non ebbero un successo immediato perché di difficile comprensione, anche a causa dello stile espositivo sintetico di Riemann, contengono tre idee importanti: la definizione e le proprietà fondamentali di una funzione complessa di variabile complessa, l’idea di superficie (di Riemann), e il ruolo fondamentale della teoria delle funzioni armoniche per lo studio delle funzioni complesse di variabili complesse⁴⁸.

Una funzione complessa di variabile complessa è per Riemann una funzione ovunque derivabile⁴⁹ nel suo dominio di definizione, ovvero ciò che oggi intendiamo per funzione analitica oppure olomorfa.

Riemann dimostrò che una funzione complessa $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è conforme⁵⁰ e soddisfa le equazioni, note come condizioni di Cauchy-Riemann,

⁴⁴ Si vedano [Klein 1874 a], [Klein 1874 b], [Klein 1874 c], [Klein 1875], [Klein 1876].

⁴⁵ Si vedano [Klein 1923], [Nastasi 2000].

⁴⁶ Fu pubblicata solo nel 1876 nella prima edizione dei *Riemann Werke*. Questo giustifica la considerevole sovrapposizioni di argomenti con il successivo lavoro del 1857. Si veda [Riemann 1990], pp. 35-80.

⁴⁷ Si veda [Riemann 1857]. In [Riemann 1990], pp. 120-144.

⁴⁸ Si veda [Bottazzini, Gray 2013].

⁴⁹ La funzione è derivabile in un punto z_0 se esiste ed è finito il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. Il limite di questo rapporto incrementale deve essere lo stesso qualunque sia il “percorso” lungo il quale h tende a zero.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

da cui segue, mediante semplice derivazione, che le funzioni u e v sono armoniche, ovvero $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ (equazione di Laplace).

Per rappresentare geometricamente una funzione complessa, si considerano due piani: nel primo si muove la variabile indipendente z , e nel secondo si riportano i corrispondenti valori della variabile dipendente w . I piani vengono spesso immaginati sovrapposti in modo da far coincidere gli assi reali e quelli immaginari. Ma per studiare una funzione complessa, per esempio una funzione razionale intera del tipo

$$w = Az^n + Bz^{n-1} + \dots + Mz + N$$

Riemann introduce un opportuno ambiente geometrico, idea chiave del suo approccio alle funzioni complesse a più valori. Per il teorema fondamentale dell'algebra, ad ogni valore di w corrispondono n punti z del piano z ; se inversamente facciamo percorrere a z il suo piano il corrispondente w percorrerà il suo piano n volte. Quindi si deve poter scomporre il piano z in n regioni tali che ad ogni regione corrisponda sempre tutto l'intero piano w .

Per ogni regione di z , Riemann considera un piano di valori w ; tali piani, detti *fogli*, sono supposti giacere l'uno sopra l'altro. Poiché si può passare in modo continuo da una regione di z ad un'altra attraverso i punti singolari (punti in cui le regioni si incontrano)⁵¹, così si deve poter passare in modo continuo da ciascuno degli n piani w ad altri, quindi gli n piani di w sono connessi in punti detti *di diramazione* (a cui corrispondono i punti singolari).

Le regioni del piano z possono pensarsi separate da una serie di "curve limite" che vanno da un punto singolare ad un altro. A ciascuna di queste curve corrisponde una curva immagine sui piani w , chiamata *sezione di diramazione*, giacché ciascuna passa per due punti di diramazione; se z oltrepassa una delle curve limite, w deve passare da un piano ad un altro. Quindi gli n piani sono connessi lungo le *sezioni di diramazione*⁵².

Il concetto di superficie riemanniana era difficile da padroneggiare: per comprendere la difficoltà, basta tener conto del fatto che il "grafico" di una funzione complessa è un sottoinsieme di \mathbb{R}^4 .

Riemann cercava quindi di rappresentare le sue superfici sezionandole per mezzo di tagli. La teoria sviluppata su queste basi, che oggi noi chiamiamo "topologia combinatoria", era già nota, grazie a Leibniz, nella seconda metà del settecento, come *analysis situs* ed ha per oggetto lo studio delle proprietà delle figure geometriche che persistono anche quando le figure sono sottoposte a deformazioni così profonde da perdere tutte le proprietà metriche e proiettive, quindi quelle proprietà invarianti per trasformazioni bicontinue. Per esempio tutte le proprietà topologiche della sfera appartengono anche all'ellissoide o al cubo, invece esistono differenze topologiche tra sfera e

⁵⁰ Una nozione fondamentale nello studio delle funzioni complesse è quella di rappresentazione *conforme* ovvero rappresentazione che *conserva gli angoli*: gli esempi più semplici di rappresentazione conforme sono la proiezione stereografica e le trasformazioni che conservano i cerchi (per esempio ribaltamenti, inversioni circolari ...). È possibile dimostrare che le figure molto piccole non subiscono quasi nessuna distorsione nella rappresentazione conforme, cioè oltre agli angoli restano approssimativamente invariati non proprio le lunghezze, ma i rapporti delle lunghezze, e ciò ha luogo con un'approssimazione tanto maggiore quanto minori sono le dimensioni della figura considerata.

⁵¹ Nel campo complesso una funzione w di z si dice continua nel punto z_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I_δ del punto z_0 di raggio δ , tale che (il modulo del numero complesso) $|w - w_0| < \varepsilon$ per ogni $z_0 \in I_\delta$. Le funzioni razionali intere sono continue. Un punto singolare di molteplicità ν è un punto in cui si annullano le prime ν derivate.

⁵² Si veda la *Parte II* della trascrizione delle lezioni di Klein qui pubblicata. Come abbiamo già detto, l'uso dei colori permette una migliore visualizzazione del processo di costruzione della superficie di Riemann associata alle funzioni. Si veda anche [Kline 1996], [Bottazzini 1990].

toro (è intuitivamente evidente che non si può trasformare una sfera in un toro senza lacerazioni o saldature).

Riemann affermava che una superficie chiusa ha *ordine di connessione* h , se su di essa si possono tracciare $h - 1$ curve chiuse (tagli chiusi, *Rückerschnitte*) che non dividono la superficie in due parti; ogni sistema di h di tali curve taglia però la superficie in almeno due parti. Quando $h=1$, come per la sfera, si parla di superficie *semplicemente connessa*. Il toro ha ordine di connessione $h=3$ e le curve chiuse che non lo spezzano sono quelle che seguono una delle due circonferenze generatrici. È possibile, afferma ancora Riemann, ridurre l'ordine di connessione di una superficie:

“Per mezzo di un taglio, cioè di una linea che giace all'interno della superficie e va da un punto della frontiera ad un altro della frontiera (Querschnitt), una superficie $(n+1)$ -volte connessa può essere trasformata in una superficie n -volte connessa. Le parti di frontiera che nascono dal taglio svolgono il ruolo di frontiera anche nel corso di ulteriori tagli, cosicché un taglio può passare per ogni punto non più di una volta, ma può finire in uno di quelli che in precedenza erano punti interni.[...] Per applicare queste considerazioni ad una superficie priva di bordo, una superficie chiusa, dobbiamo trasformarla in una con bordo mediante la specializzazione di un punto arbitrario, in modo da fare la prima divisione utilizzando questo punto e un taglio che inizia e finisce in esso, e perciò mediante una curva chiusa.”

Questa parte si conclude mostrando che con un numero pari $2p$ di tagli chiusi una superficie diventa semplicemente connessa. Il numero p sarà chiamato da Clebsch *genere* della superficie. Riemann aveva così classificato le superfici chiuse (orientabili) per mezzo del loro genere.

Una ciambella con p buchi ha genere p e ordine di connessione $h=2p+1$. Hanno genere p anche una sfera con $2p$ buchi o una sfera con p manici (distendendo e contraendo opportunamente porzioni di sfera, si possono riunire insieme le coppie di buchi riattaccandoli per il contorno e formando una specie di manico). Il modello topologico della sfera con i buchi è di William K. Clifford⁵³ ed è usato anche da Riemann, quello della sfera con i manici è stato introdotto da Klein proprio durante il suo primo corso a Leipzig⁵⁴.

Nella seconda parte della tesi di Riemann si trova enunciato l'importante *Abbildungssatz* (teorema dell'applicazione): ogni regione G semplicemente connessa, diversa dal piano, può essere rappresentata, attraverso una funzione analitica $w = f(z)$ biettiva (quindi biolomorfa), sopra un cerchio K (e quindi anche su un semipiano).

Riemann non dimostra rigorosamente questo suo teorema, e le sue considerazioni si basano essenzialmente sul *principio di Dirichlet* secondo il quale se è assegnata una funzione continua sul bordo di una regione semplicemente connessa allora esiste una funzione armonica definita sull'intera regione che coincide con la funzione data sul bordo. Come vedremo le dimostrazioni rigorose di questi teoremi verranno date molto più tardi, ma per Klein sono comunque principi geometrici per produrre funzioni analitiche $f(z)$, anche se di tali funzioni si può solo affermare l'esistenza.

Sulla *Abbildungssatz* si basa l'importante problema della *parametrizzazione e uniformizzazione* dell'andamento complessivo delle funzioni analitiche a più valori (o dell'associata superficie di

⁵³ Si veda [Clifford 1877].

⁵⁴ Si veda la trascrizione delle lezioni qui pubblicate.

Riemann): Data una funzione analitica $w = f(z)$ in una “regione semplice” (*schlichten Gebiet*) del piano complesso, si cercano due funzioni iniettive meromorfe $w = w(u)$ e $z = z(u)$ tali che:

$$w(u) = f(z(u)).$$

L'equazione algebrica $w^2 + z^2 - 1 = 0$ si può uniformizzare con le funzioni $w(u) = \cos u$ e $z(u) = \sin u$.

Come vedremo, elemento chiave del problema dell'uniformizzazione saranno le *funzioni automorfe*⁵⁵ ovvero quelle funzioni invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni lineari fratte

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d},$$

dove a, b, c, d sono numeri reali o complessi tali che $ad - bc = 1$, o rispetto ad un suo sottogruppo. Il gruppo deve essere discontinuo in ogni parte finita del piano complesso⁵⁶.

Un semplice esempio di funzione automorfa è la funzione che manda in modo conforme un triangolo curvilineo, con angoli interni nulli, inscritto in un cerchio del z -piano nel w -semipiano superiore. Si può supporre che ai vertici A, B e C del triangolo corrispondano i punti 0, 1 e ∞ , così che il lato del triangolo AB abbia come immagine il segmento 01. Nel w -piano si può estendere (principio di riflessione di Schwarz) la funzione oltre il segmento 01, nel semipiano inferiore. Nel z -piano a questa procedura corrisponde l'estensione della funzione ad un ulteriore triangolo ad archi circolari, che si ottiene attraverso il ribaltamento del triangolo dato lungo il lato AB e il cui nuovo vertice giace sulla circonferenza. Si può procedere in questo modo, ribaltando i triangoli ad archi circolari lungo i loro lati, finché il cerchio circoscritto al triangolo di partenza sia riempito. È geometricamente plausibile che questo cerchio venga totalmente riempito e che faccia da *cerchio limite* alla così detta *figura modulare*.

Nel w -piano ai triangoli ribaltati corrispondono sempre dei semipiani che si stratificano in modo naturale come infiniti fogli di una *superficie di Riemann*. I punti di ramificazione sono 0, 1 e ∞ . La funzione estesa dal triangolo di partenza alla figura modulare, manda nella sua estensione questa figura modulare conformemente sulla superficie di Riemann. Queste funzioni furono successivamente chiamate da Klein *funzioni automorfe con cerchio limite*.

Dopo Riemann, Klein era, fino al 1881, il principale artefice dello sviluppo di questi concetti fondamentali di uniformizzazione.

La corrispondenza Klein-Poincaré: il *Grenzkreistheorem*

Quando Klein terminò le sue lezioni del primo semestre (semestre invernale 1880/81), si imbatté in tre note pubblicate all'inizio di quell'anno da Poincaré sotto il titolo di *Sur les Fonctions fuchsiennes*⁵⁷. Leggendo gli articoli Klein intuì subito che gruppi discontinui, funzioni fuchsiane e serie Theta formavano le parti chiavi di un programma che mirava all'uniformizzazione di tutte le curve algebriche.

L'oggetto principale dei lavori era quello che Poincaré chiamava *funzioni fuchsiane*, funzioni definite su un disco o un semipiano ed invarianti sotto certi sottogruppi di $SL(2, \mathbb{R})$. Questa ampia classe di funzioni, che generalizzavano le funzioni ellittiche, erano invarianti sotto l'azione di sottogruppi discontinui del gruppo delle trasformazioni lineari fratte che fissano un cerchio

⁵⁵ Si vedano [Klein 1979], [Fricke & Klein 1897].

⁵⁶ Il termine, introdotto da Poincaré, indica che il numero delle immagini di un punto, rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo, che cadono in un qualsiasi dominio chiuso e limitato, è finito.

⁵⁷ Si vedano [Poincaré 1881 a], [Poincaré 1881 b], [Poincaré 1881 c].

“fondamentale”. Il gruppo, chiamato da Poincaré *gruppo fuchsiano*, veniva studiato guardando come esso trasforma una regione limitata da archi circolari perpendicolari al cerchio fondamentale (poligoni ad archi circolari). Si tratta chiaramente di funzioni automorfe, ma quando lui scriveva i suoi articoli non conosceva ancora questa classe di funzioni.

I risultati principali presentati da Poincaré riguardano la relazione tra le funzioni fuchsiane associate ad un dato gruppo, e l'uso di queste funzioni per risolvere equazioni differenziali lineari con coefficienti razionali o algebrici: infatti se $x = F(z)$ è una funzione fuchsiana, allora

$$y_1 = \left(\frac{dF}{dz}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = z \left(\frac{dF}{dz}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sono due soluzioni dell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\phi(x)$$

dove ϕ è algebrica in x .

Un ruolo importante nello studio delle funzioni fuchsiane, è giocato dalle funzioni *Theta-fuchsiane*, così chiamate per analogia con le Theta-funzioni che compaiono nella teoria delle funzioni ellittiche: sia z un punto interno al cerchio fondamentale e σ un elemento del gruppo fuchsiano, la funzione θ (ad un solo valore) è detta Theta-fuchsiana se, per qualche intero m soddisfa

$$\theta(\sigma(z)) = \theta(z) \left(\frac{\sigma(dz)}{dz}\right)^{-m}$$

oppure equivalentemente

$$\theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \theta(z)(cz+d)^{2m}$$

con $ad - bc = 1$.

Il quoziente di due funzioni Theta-fuchsiane corrispondenti allo stesso gruppo è una funzione fuchsiana⁵⁸.

Poincaré aveva cominciato a lavorare sulle equazioni differenziali nel 1879 con lo scopo di partecipare ad un concorso bandito dalla *Académie des Sciences* di Parigi sul tema: “*Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante*”⁵⁹. Hermite aveva scelto questo argomento perché desiderava che i giovani matematici francesi entrassero in contatto con il matematico tedesco Lazarus Fuchs, che aveva pubblicato dei lavori innovativi in questo campo⁶⁰.

I lavori di Poincaré del 1881 sono proprio il frutto di una intensa corrispondenza scientifica⁶¹ con Fuchs: il nome “funzioni fuchsiane”, contestato da Klein come vedremo, era proprio un omaggio a Fuchs, i cui lavori erano stati il suo punto di partenza.

Il premio dell'*Académie* fu assegnato a Georges Halphen, anch'egli ispiratosi a Fuchs. Per il lavoro di Poincaré ci fu una menzione speciale⁶².

Klein, dopo la lettura dei primi due lavori, scrisse⁶³ immediatamente, il 12 giugno 1881, a Poincaré: il giovane matematico francese⁶⁴ ignorava del tutto i suoi lavori sulle funzioni ellittiche modulari⁶⁵.

⁵⁸ Si veda [Gray 2000].

⁵⁹ Comptes Rendus, 88 (1879), pg. 511. Il premio era una medaglia dal valore di tremila franchi.

⁶⁰ Si vedano [Fuchs 1866], [Fuchs 1880], ma anche i successivi [Fuchs 1882] e [Fuchs 1884].

⁶¹ Si veda [Poincaré 1921].

⁶² Poincaré, *Oeuvres* 2, pg. 73.

⁶³ Per la corrispondenza Klein-Poincaré si veda [Klein 1921], vol. 3. Si veda anche [Gray 2000].

Certo queste funzioni erano solo un caso particolare di quelle da lui considerate, ma se Poincaré avesse letto tali lavori si sarebbe subito reso conto che Klein partiva da “*considerazioni molto generali*”. Poincaré non conosceva neanche la rimanente letteratura tedesca sull’argomento, come per esempio, i lavori di Schwarz sulle equazioni differenziali ipergeometriche e in generale sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine⁶⁶.

Klein, nella sua lettera, sottolineava anche come le linee guida del suo lavoro molto si avvicinassero a quelle di Poincaré:

“ 1. Funzioni periodiche e doppiamente periodiche sono solo esempi di funzioni ben definite invarianti sotto trasformazioni lineari. È compito della analisi moderna, determinare tutte queste funzioni.

2. Il numero di queste trasformazioni può essere finito; questo dà le equazioni dell’icosaedro, ottaedro ... che io ho considerato in precedenza e dai quali sono partito per la formazione di tutto questo cerchio di idee.

3. Gruppi infiniti di trasformazioni lineari, che danno luogo a funzioni utili (gruppi discontinui nella sua notazione), si ottengono ad esempio, quando si parte da un poligono [i cui lati sono] ad archi di cerchio, che intersecano un cerchio fissato ad angolo retto e i cui angoli sono parti $[\pi/n]$ determinate di π .

4. Ci si dovrebbe occupare di tutte queste funzioni (come Lei ha iniziato ora), ma per avere obiettivi concreti, restringiamoci al triangolo curvilineo e in particolare alle funzioni ellittiche modulari.”

E Klein annunciava altresì la sua intenzione di tornare sull’argomento grazie anche al corso che avrebbe tenuto, nel successivo semestre, sulle equazioni differenziali.

L’ambizioso Klein, sentitosi sfidato, sembra volere e dovere essere necessariamente il primo a portare a termine la ricerca da lui iniziata.

La replica di Poincaré è modesta⁶⁷. Ammette la sua ignoranza su quanto pubblicato fino ad allora, e riconosce la priorità di Klein su certi risultati dichiarandosi disposto a rendergli giustizia nelle successive pubblicazioni. Corrispondere con Klein era sicuramente un’opportunità da non perdere per il giovane Poincaré, così da quel momento in poi le sue lettere a Klein conterranno molte domande e richieste di delucidazioni. Questo atteggiamento non dovette dispiacere Klein che non solo gli inviò alcuni suoi lavori ma gli suggerì di leggerne anche altri⁶⁸, come quelli dei suoi allievi, von Dyck, Gierster e Hurwitz.

Mentre Klein, come lui stesso lamenta spesso, era preso “*da altri obblighi*”, Poincaré procedeva nei suoi studi incredibilmente in fretta: la “competizione” tra i due divenne ben presto alla pari e fu sempre piuttosto corretta, tanto che Klein, il 3 aprile 1882, scriveva a Poincaré:

⁶⁴ Henri Poincaré, all’epoca lettore di Analisi all’Università di Caen, aveva appena 26 anni, cinque anni più giovane di Klein. Si veda [Poincaré 2013].

⁶⁵ Si vedano [Klein 1879a], [Klein 1879b], [Klein 1879c], [Klein 1880a].

⁶⁶ Si vedano [Schwarz 1870], [Schwarz 1872].

⁶⁷ Lettera di Poincaré a Klein del 15 giugno 1881.

⁶⁸ Lettera di Klein a Poincaré del 19 giugno 1881.

“Mi importerà moltissimo restare con lei in intenso contatto. Per me il vivo contatto con matematici di uguali aspirazioni è sempre stato condizione indispensabile per la [mia] propria produzione matematica ”.

Buona parte della corrispondenza del 1881 è incentrata sopra la teoria dei poligoni fondamentali, legata alle funzioni modulari. Poincaré domandava⁶⁹:

“Ha trovato tutti i poligoni ad archi circolari [Kreisbogenpolygone] che danno luogo a un gruppo discontinuo? Ha dimostrato l'esistenza di funzioni che corrispondono a ciascun gruppo discontinuo?”

Il problema era sempre lo stesso: Poincaré aveva anche dimostrato autonomamente alcuni di questi risultati, ma non conosceva né le dimostrazioni di Schwarz né il principio di Dirichlet⁷⁰ e soprattutto non conosceva le funzioni automorfe con cerchio limite!

Era proprio questo che Klein contestava duramente a Poincaré: perché chiamare fuchsiane le funzioni automorfe con cerchio limite? Che merito aveva Fuchs in tutto questo?

“Fondamentalmente tutte queste ricerche si basano su Riemann. La visione di Schwarz, nel vol. 75 del giornale di Borchardt (che io le consiglio urgentemente se ancora non lo conosce), strettamente legata a queste è stata di massima importanza per il mio sviluppo. Il lavoro del Signor Dedekind sopra le funzioni ellittiche modulari nel giornale di Borchardt vol. 83 fu pubblicato dopo che a me la rappresentazione geometrica delle funzioni modulari era già chiara (Autunno 1877). A questi lavori, stanno in voluta contrapposizione quelli di Fuchs a causa della loro forma non geometrica.”⁷¹

La risposta di Poincaré è chiara, non intende cambiare denominazione⁷²:

“ Il rispetto che devo a M. Fuchs non me lo permette. D'altronde, se è vero che il punto di vista di questo dotto geometra di Heidelberg è completamente differente dal vostro e dal mio, è certo anche che i suoi lavori sono serviti come punto di partenza e di fondamento a tutto quello che si è fatto dopo in questa teoria. È giusto quindi che il suo nome resti legato a queste funzioni che giocano un ruolo importante.”

Ma dopo aver letto i lavori suggeriti da Klein, Poincaré ammetterà⁷³:

“è chiaro che avrei scelto un altro nome se avessi conosciuto il lavoro di M. Schwarz.”

L'aspra discussione sulla priorità del nome non si conclude qui.

⁶⁹ Lettera di Poincaré a Klein del 15 giugno 1881.

⁷⁰ Si può sempre determinare una funzione che manda in modo conforme un poligono ad archi circolari in un semipiano, la costruzione è simile a quella fatta prima con il triangolo. La funzione può essere estesa anche usando il principio di Dirichlet. Lettera di Klein a Poincaré del 19 giugno del 1881.

⁷¹ Lettera di Klein a Poincaré del 19 giugno 1881.

⁷² Lettera di Poincaré a Klein del 22 giugno 1881.

⁷³ Lettera di Poincaré a Klein del 27 giugno del 1881.

Ritorniamo al problema dell'uniformizzazione. Klein entrò effettivamente in possesso della terza nota sulle funzioni fuchsiane di Poincaré nel dicembre del 1881. In questo lavoro si trova enunciato (come lui temeva) il teorema di uniformizzazione per le curve algebriche: *“Le coordinate dei punti di una curva algebrica possono essere espresse come funzioni fuchsiane di una variabile ausiliare”*.

Klein scrisse a Poincaré il 4 dicembre del 1881 congratulandosi con lui per i risultati ottenuti e chiedendo un articolo, da pubblicare sui *Mathematische Annalen*, in cui venissero esposti a grandi linee i suoi metodi e risultati. Lui avrebbe aggiunto a questo lavoro una nota per ricollegarlo al suo sulle funzioni modulari e in cui avrebbe presentato le sue obiezioni sulla terminologia usata.

Appare evidente che Klein, che aveva reso chiari e ulteriormente sviluppato, sulla base del suo geniale modo di pensare geometrico-visivo, molti risultati di Riemann, era preoccupato che il suo lavoro non ricevesse sufficienti consensi. Non poteva permettersi di restare a guardare mentre la scuola di Berlino, di cui faceva parte anche Fuchs, raccoglieva plausi, a suo parere, non guadagnati. Il lavoro presentato da Poincaré, *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires*, fu pubblicato nel volume 19 dei *Mathematische Annalen*⁷⁴, con una lunga nota finale a piè di pagina di Klein. Poincaré riassume i risultati principali ma senza dimostrazioni, quindi senza delineare i suoi metodi di lavoro, e quasi per porre rimedio al suo errore, chiama qui *funzioni kleiniane* una classe di funzioni automorfe più generali senza cerchio limite, provocando, ancora una volta, le proteste di Klein: in questo caso, oltre a Riemann, Schottky⁷⁵ avrebbe meritato la citazione!

Poincaré chiese a Klein di aggiungere una nota al suo lavoro per difendere, ancora una volta, la sua scelta⁷⁶: aveva scelto il nome *fuchsiane* per l'impossibilità di dimenticare le notevoli scoperte di Fuchs sulla teoria delle equazioni differenziali lineari, così come la dizione *kleiniane*, faceva riferimento all'uomo che ne *“aveva sottolineato la loro principale importanza”*.

Klein propose, nella primavera del 1882, di astenersi completamente sul nome e di naturalizzare il concetto di funzione automorfa. Poincaré replicò in tedesco citando Faust *“Nome non è che suono e fumo,”* e aggiungendo: *“Dopo tutto è per me uguale, fate ciò che voi volete, dal mio canto io farò come vorrò”*. Ancora oggi tuttavia esistono specifici gruppi di Fuchs e di Klein.

Occorre segnalare l'intervento, all'interno di questa polemica, dello stesso Fuchs. La replica⁷⁷ di Klein lascia chiaramente intendere quanto duri fossero i toni di questi *“attacchi”*: *“Non io ho preso le idee dal suo lavoro, bensì io ho mostrato che i suoi temi dovevano essere affrontati con le mie idee.”*

Interessante è il riferimento di Poincaré alla geometria non-euclidea come alla *“vera chiave del problema che ci occupa”*, anche se non spiega in che modo, e si stupisce che Klein, che pure aveva svolto un lavoro pionieristico che mostrava il legame tra geometria non-euclidea e geometria proiettiva, non fosse riuscito a notare questo collegamento⁷⁸. È di Poincaré l'idea di interpretare il gruppo delle trasformazioni lineari che permuta i triangoli della figura modulare nella geometria iperbolica⁷⁹.

⁷⁴ Si veda [Poincaré1882].

⁷⁵ Si veda [Schottky 1877]. Oltre alla nota di Klein, si veda la lettera di Klein a Poincaré del 13 gennaio 1882.

⁷⁶ Lettera di Poincaré a Klein del 28 marzo del 1882.

⁷⁷ Si veda lettera di Klein a Poincaré del 3 aprile 1882.

⁷⁸ Lettera di Poincaré a Klein del 15 giugno 1881; lettera di Klein a Poincaré del 19 giugno del 1881.

⁷⁹ Si può pensare alla figura modulare come ad una tassellazione tramite triangoli del disco di Poincaré, a partire dalla quale Escher ha costruito alcune delle sue famose litografie.

Klein nel frattempo aveva concluso le sue lezioni estive sulla teoria geometrica delle funzioni. Nel manoscritto, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, che aveva mandato a Teubner per la pubblicazione⁸⁰, si trovavano enunciati i suoi due importanti teoremi di uniformizzazione – il *Grenzkreistheorem* e il *Rückkehrschnitttheorem* – che rappresentano un ulteriore sviluppo della *Abbildungssatz*.

I due teoremi, tenendo conto di tutti i successivi sviluppi, possono essere enunciati nel seguente modo⁸¹:

Rückkehrschnitttheorem (teorema dei tagli chiusi): Sia G una superficie (compatta) di Riemann di genere p ; sia G' la regione semplice in cui viene trasformata attraverso un sistema di $2p$ tagli a due a due disgiunti. G' è limitata da $2p$ curve di frontiera semplicemente chiuse e disgiunte, così che i singoli bordi dei tagli si trasformano uno nell'altro attraverso trasformazioni lineari. Funzioni algebriche su G' sono uniformizzabili attraverso funzioni automorfe che hanno G' come dominio fondamentale.

Grenzkreistheorem (teorema del cerchio limite): L'uniformizzazione di una funzione algebrica è sempre realizzabile mediante funzioni automorfe con cerchio limite. Cioè esiste un dominio G' che attraverso un gruppo di trasformazioni lineari porta ad un ricoprimento dell'interno della circonferenza unitaria.

Effettivamente già alla fine del primo semestre, parlando a lezione di “*superfici ideali di Riemann per funzioni algebriche*”, Klein aveva illustrato questo principio generale con l'aiuto di esempi: per $p = 0$ scelse $w^3 = z^2$ con le funzioni uniformizzanti $z = g_1(t) = t^3$ e $w = g_2(t) = t^2$, per $p = 1$ invece $w = 1 - z^4$ senza però dare esplicitamente le funzioni ellittiche che compaiono come uniformizzanti, non avendo ancora trattato questo tipo di funzioni nelle lezioni⁸². Klein arrivò ad una generalizzazione per $p > 1$ del principio di uniformizzazione durante il secondo semestre.

Alcuni dei risultati ottenuti furono anche pubblicati⁸³ da Klein nello stesso volume 19 dei *Mathematische Annalen*, in cui era stato pubblicato il lavoro di Poincaré, ed erano stati preannunciati allo stesso Poincaré in una lettera⁸⁴ (la stessa in cui si opponeva al termine *kleiniane*). A partire da questo momento, pur essendo il tono usato nelle lettere sempre cordiale, si nota un qualche irrigidimento nella collaborazione (competizione?): nessuno dei due vuol rivelare all'altro i propri metodi di dimostrazione.

Klein arriverà, con grande fatica fisica oltre che mentale, alla versione definitiva⁸⁵ del suo *Grenzkreistheorem* nella primavera del 1882. A Pasqua di quell'anno era andato nell'isola di Norderney per riposarsi. Non essendo le condizioni meteorologiche favorevoli, decise di ripartire:

“Nell'ultima notte tra il 22 e 23 marzo, che io a causa dell'asma trascorsi seduto sul sofà, improvvisamente alle ore 2,30 il teorema del cerchio limite era davanti a me, come esemplificato dalla figura del tetradecagono. La mattina seguente in treno io ponderai ancora una volta ciò che avevo trovato in tutti i dettagli. Solo ora io sapevo

⁸⁰ Si veda [Klein 1882a].

⁸¹ Si veda [König 1981a].

⁸² Si veda trascrizione delle lezioni di Klein qui pubblicata.

⁸³ In [Klein 1882b] si trova enunciato il *Rückkehrschnitttheorem*.

⁸⁴ Lettera di Klein a Poincaré del 13 gennaio 1882.

⁸⁵ Si veda [Klein 1882c].

*che avevo un grosso teorema. Arrivato a Düsseldorf lo buttai giù subito, lo datai 27 marzo, lo spedii a Teubner e mandai le copie delle bozze a Poincaré e Schwarz ...*⁸⁶

Poincaré, due settimane dopo Klein, il 10 aprile 1882, presentò nei *Comptes Rendus* una breve nota di due pagine con il suo *Grenzkreistheorem*, citando le due note di Klein. Poco più di un mese dopo, il 7 maggio, Klein informava Poincaré che aveva dato una formulazione ancora più generale ai suoi risultati, e il 14 maggio, oltre a dare qualche informazione in più sulla sua dimostrazione, enfatizzava che la corrispondenza che aveva costruito tra le varietà a due o più dimensioni, che rappresentano lo spazio delle superfici di Riemann, e lo spazio delle funzioni uniformizzanti doveva essere analitica.

La corrispondenza tra Klein e Poincaré si interrompe definitivamente il 22 settembre del 1882⁸⁷, principalmente a causa delle cattive condizioni di salute di Klein.

Purtroppo i loro risultati si rivelarono incompleti; solo dal 1907 Brouwer e Koebe, ma anche lo stesso Poincaré, furono in grado di dare dimostrazioni rigorose⁸⁸.

Klein pagò quindi i suoi successi a caro prezzo. Nell'autunno del 1882 era così esausto da dover lasciare proseguire le sue lezioni a Dyck, limitandosi solo a condurre i seminari sulle funzioni abeliane, e aspettando che le sue condizioni di salute migliorassero.

Nel 1884 Klein dà ancora prova dell'importanza che attribuisce alla visualizzazione geometrica ponendo l'icosaedro alla base della teoria delle equazioni di quinto grado. Nel suo *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* presenta, sotto l'aspetto algebrico, una sintesi dei suoi più brillanti lavori sulla teoria delle sostituzioni e delle equazioni e sulle funzioni ellittiche modulari: Klein prova l'isomorfismo tra il gruppo di Galois dell'equazione dell'icosaedro e il gruppo delle rotazioni dell'icosaedro, dove l'equazione dell'icosaedro è sostituita da una sua risolvente di quinto grado, che risolve con l'aiuto delle funzioni ellittiche modulari.

Ma in questo stesso periodo Klein riconosce di non riuscire più a tenere il passo con l'evolversi veloce della ricerca, e comincia a meditare altre vie per mantenere la sua posizione come capo di una importante scuola matematica.

Arriverà così nel 1886 alla sua destinazione accademica finale, Göttingen, dove assumerà, nei successivi dieci anni, il ruolo di "grande maestro".

Einleitung in die geometrische Funktionentheorie : i manoscritti e le lezioni

Come abbiamo già detto le lezioni sulla teoria delle funzioni costituivano l'oggetto del primo corso che Klein teneva a Leipzig: il nome del corso, di quattro ore settimanali seguito da 74 studenti nel primo semestre e 34 nel secondo, era *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise* [Teoria delle funzioni trattata in modo geometrico]. La traduzione del manoscritto delle lezioni, fatta da Gerbaldi e qui pubblicata, è relativa agli argomenti trattati nel primo semestre, le lezioni del secondo semestre sono invece contenute, come abbiamo già osservato nei precedenti paragrafi, nel libro di Klein: "*Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellung*" [Sulla teoria delle funzioni algebriche di Riemann e loro

⁸⁶ Si veda [Klein 1921], p. 584. Del tetradecagono si era occupato tre anni prima in connessione con il suo lavoro sulle equazioni modulari per le trasformazioni di ordine 7; si veda [Klein 1879b].

⁸⁷ Dopo le lettere di maggio ci sono due lettere a settembre in cui vagamente parlano dei loro progetti futuri.

⁸⁸ Si vedano [Brouwer 1911], [Brouwer 1912], [Poincaré 1907], [Koebe 1910].

integrali. Un supplemento alla rappresentazione ordinaria], pubblicato nel 1882 da Teubner a Leipzig⁸⁹.

Nel 1880/81 fu l'allievo di Klein, Ernest Julius Martin Lange, a rielaborare le trascrizioni delle lezioni in due così detti "*Normalhefte*", quaderni che attualmente sono considerati perduti ma che furono esposti per essere visionati dagli studenti nella biblioteca dell'appena fondato "Seminario Matematico" dell'Università di Leipzig.

A Leipzig è comunque conservata una trascrizione dei quaderni di Lange, ad opera di Adolph Mayer, pubblicata, a cura di Fritz König⁹⁰, da Teubner nel 1987.

L'esattezza della trascrizione di Mayer è assicurata dal confronto con gli appunti scritti da Klein per la preparazione di queste lezioni⁹¹, conservati nel *Nachlass Felix Klein* all'Università di Göttingen.

Esistono altre due trascrizioni, abbastanza fedeli, dei quaderni di Lange: una ad opera del professore di fisica di Leipzig Otto Wiener⁹², l'altra prodotta da Paul Epstein⁹³ nel 1892, sotto la direzione, a Göttingen, dello stesso Klein. Una copia autografa (in tedesco) di quest'ultima versione, mai entrata in commercio e oggi disponibile in rete (Cornell University Library), è quella usata da Gerbaldi per la traduzione.

Le versioni di Mayer ed Epstein differiscono solo nei paragrafi che costituiscono l'introduzione: nel testo di Mayer si danno cenni sui vari sistemi numerici, dai naturali ai reali, e dopo aver introdotto la rappresentazione geometrica dei numeri complessi e delle operazioni algebriche, si trovano brevi riferimenti ai quaternioni, alle funzioni esponenziale e logaritmica e a quelle trigonometriche. Nella copia autografa di Epstein vengono invece trattati solo i numeri complessi. Per il resto, a parte una diversa sistemazione e numerazione dei vari paragrafi, gli argomenti esposti sono gli stessi e quasi sempre presentati allo stesso modo. La traduzione di Gerbaldi è perfettamente conforme all'originale; se si tiene debitamente conto della difficoltà della lingua tedesca, potremmo dire che si tratta di una traduzione libera ben fatta dell'originale. Poche, e non particolarmente rilevanti, le note da lui apposte. Gerbaldi correda inoltre la sua traduzione di figure a colori che trae, come lui stesso scrive nella lettera a Cesàro, dai suoi appunti: la differenza tra l'impatto visivo delle figure a colori e quelle in bianco e nero è notevole; forse per questo, un maestro delle visualizzazioni, quale Klein era, usava a lezione i gessetti colorati.

Obiettivo principale del corso era quello di dare una rappresentazione della teoria delle funzioni di Riemann, che prima di tutto era una teoria geometrica. Klein descrive, nello spirito di Riemann, le funzioni analitiche come applicazioni conformi, e alla costruzione analitica fa pendant la superficie di Riemann, che per Klein, non solo serve per illustrare, ma è parte indispensabile del concetto di funzione, "*come l'humus sul quale le funzioni possono crescere e prosperare*".

La teoria geometrica delle funzioni di Riemann costituiva, proprio grazie al concetto di applicazione conforme, la base per formulare e risolvere molti problemi della fisica matematica classica (teoria del potenziale, meccanica dei flussi, etc. ...). È nel secondo semestre che Klein tirò fuori l'idea di fondo di questa teoria e ne fece il suo principio guida, sviluppando la così detta "*matematica fisica*" (*physikalische Mathematik*)

⁸⁹ Si veda [Klein 1882a].

⁹⁰ Si veda [Klein 1880c] e [König 1987].

⁹¹ Si veda [Klein 1880b].

⁹² Si veda [Klein 1880d].

⁹³ Si veda [Klein 1892].

*“Klein – scrive Courant – ha generato funzioni, pensando un pezzo di piano o una qualsiasi superficie ricoperta con uno strato conduttore e ponendo poli in singoli punti. La condizione di flusso rappresenta allora una funzione ben determinata sul campo complesso. Tutti i teoremi di esistenza, la famosa *Abbildungssatz* di Riemann ... sono da questo punto di vista molto più immediatamente comprensibili e trasparenti; tutto avviene in un contesto necessariamente connesso.”⁹⁴*

Quindi con *“Un supplemento alla rappresentazione ordinaria”*, posto nel titolo del suo lavoro, Klein intende l’uso del modello di flusso stazionario, generato da un campo elettrico su una superficie, come già aveva fatto nel 1876 nel lavoro sopra gli integrali abeliani.

Klein non ebbe difficoltà a trasferire su una superficie di Riemann le condizioni di flusso, pensate su una qualsiasi superficie dello spazio. Considerò superfici chiuse rappresentate come sfere con p manici: cambiando la posizione dei poli elettrici su questa superficie e cambiando il genere topologico p , produsse varie funzioni.

A questo punto i principali risultati [della teoria di Riemann](#) [si](#) ottenevano trasferendo [semplicemente le proprietà riconosciute di questi](#) flussi alle funzioni che le definivano.

Questo metodo *“matematico fisico”* suscitò naturalmente anche l’interesse di molti fisici, come testimonia la copia dei quaderni di Lange dovuta al fisico Otto Wiener⁹⁵.

Le lezioni tenute da Klein nel primo semestre, oggi verrebbero considerate una introduzione elementare ad un corso di geometria differenziale, ma a quel tempo erano argomenti ancora poco noti che, per via delle tante applicazioni, cominciavano ad interessare un pubblico sempre più vasto di matematici.

Ecco come Klein introdusse agli studenti le sue lezioni⁹⁶:

Martedì, 26. 10. 1880

“Signori miei! Parlando oggi per la prima volta, avverto la sensazione di una certa insicurezza. Io non so quali conoscenze e interessi posso aspettarvi da Voi, quali aspettative e richieste Voi potreste rivolgermi. Il corso, che oggi comincio, è anzitutto destinato, come ho preannunciato, a [studenti di] un semestre intermedio. Io non vorrei richiedere più che gli elementi di Geometria analitica e di Calcolo differenziale e integrale. Io mi auguro di portarvi ad avere una individuale conoscenza delle funzioni normalmente usate in analisi. Qui mi avvalgo, molto, come traspare dal titolo delle mie lezioni, dei mezzi di visualizzazione che la geometria fornisce alla teoria delle funzioni. D’altro lato io so che molti di Voi sono progrediti già oltre nei propri studi matematici. Io spero di essere anche in grado di fornirvi, nel corso delle mie lezioni, alcune cose personali, che possano essere interessanti e utili. Spero soprattutto, di poter presentare il campo da trattare con molta e non comune chiarezza. Ma, almeno in questo semestre, non potremo arrivare alle domande propriamente più raffinate della teoria delle funzioni; io posso guidarvi solo al punto di acquisire le condizioni preliminari per

⁹⁴ Si veda [Courant 1925].

⁹⁵ Otto Wiener è fratello del matematico Hermann Wiener che aveva studiato con Klein prima a München e poi, nel 1881/82, a Leipzig.

⁹⁶ Introduzione scritta da Klein nei suoi appunti delle lezioni. Si vedano [Klein 1880 b], pp.1-3; [König 1987].

Traduzione in italiano della curatrice.

la comprensione di queste domande. Soprattutto nei primi tempi io lavorerò forse troppo lentamente e in modo elementare rispetto alle vostre esigenze.

Detto questo, Vi prego di pensare se questo corso può essere ritenuto importante. Ma vorrei richiamare l'attenzione dei più giovani specialmente alle regole, che si devono seguire ascoltando lezioni matematiche se si vuole trarne vantaggi e successi. Mi è sempre sembrata una questione importante che nei singoli semestri si seguano solo pochi corsi e che si applichi tutto l'impegno nella loro rielaborazione. Qui mi sembra quasi inevitabile che ogni studente durante il corso scriva ampie note e che le elabori ancora nello stesso giorno. Ciò assume maggior valore in quanto intendo trattare moltissimi argomenti. Forse Voi mi richiederete un manuale per la nostra disciplina. Io vorrei consigliare alle matricole ad esempio la teoria delle funzioni di Durège⁹⁷ oppure le Lezioni sulla teoria degli integrali abeliani di Riemann del prof. Neumann⁹⁸. Nel corso di queste lezioni troverò molte occasioni di citare la letteratura più diversa. Voi sarete quindi in condizione di utilizzare immediatamente queste informazioni. Si considerino però questi aiuti non così superflui; devono formare una sorta di introduzione nella conoscenza della letteratura matematica e saranno utili in futuro, se e quando farete studi personali.

Il corso era diviso in tre parti:

I. Studio geometrico delle funzioni elementari di variabile complessa

II. Funzioni algebriche e superfici di Riemann

III. Funzioni definite da integrali.

Dopo aver parlato della rappresentazione geometrica dei numeri complessi, Klein comincia uno studio dettagliato delle funzioni lineari dal punto di vista della teoria delle applicazioni, della teoria degli invarianti e della teoria dei gruppi: dopo le funzioni lineari intere e lineari fratte, si sofferma a lungo sulle trasformazioni per raggi reciproci (inversioni circolari), primo esempio di applicazione conforme. La descrizione di come si trasformano nel piano w certi movimenti fondamentali del piano z , gli permette di giungere alle trasformazioni lineari generali e ai loro invarianti. Anche la proiezione stereografica della sfera di Riemann sul piano complesso viene accuratamente discussa in modo geometrico-visivo e analitico.

Comincia quindi lo studio delle funzioni razionali. Per prima si studiano, sia analiticamente sia con le superfici di Riemann, le funzioni razionali intere e la conformità delle rappresentazioni del piano z da esse indotte (tenendo conto della presenza di eventuali punti singolari). Molto dettagliatamente vengono analizzati i seguenti esempi: $w = z^2$, $w = z^3$, $w = z^3 - 3z$, $w = z^3 + 3z$ e infine, la funzione intera di quinto grado, $w = \alpha \left(\frac{z^5}{5} - \frac{2z^3}{3} + z \right) + \beta$, dove le costanti α, β sono reali.

La prima parte del corso si chiude con la trattazione delle funzioni razionali generali $w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, dove $\varphi(z), \psi(z)$ sono funzioni intere di z : le prime funzioni di questo tipo sono ottenute da funzioni intere $w = f(z)$ con una sostituzione lineare delle variabili

⁹⁷ Si veda [Durège 1864].

⁹⁸ Si veda [Neumann 1865].

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}, \quad w' = \frac{aw + b}{cw + d}$$

Queste trasformazioni vengono subito applicate nei casi $w = z^3$ e $w = z^3 - 3z$.

Segue la trattazione generale delle funzioni razionali fratte, illustrata anche attraverso speciali funzioni fratte come ad esempio la $w = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$, ottenuta partendo da una decomposizione della sfera riemanniana in $4n$ triangoli.

Dopo una breve esposizione delle funzioni trascendenti elementari, ancora come funzioni ottenute da determinate scomposizioni della superficie sferica, vengono trattate le funzioni algebriche.

Viene quindi presentata la teoria delle curve algebriche e, tramite esempi, il successivo passaggio alla teoria delle superfici di Riemann per funzioni algebriche generali: Klein tratta qui argomenti fondamentali della geometria algebrica come il teorema di Bézout e le serie di Puiseux.

Le superfici di Riemann vengono studiate anche da un punto di vista puramente geometrico guardando alle proprietà che rimangono inalterate per deformazioni continue (Analysis situs).

Il corso si chiude con l'estensione alle funzioni di variabile complessa delle nozioni fondamentali del calcolo infinitesimale stabilite per variabili reali: si studiano gli integrali di funzioni razionali e di funzioni algebriche.

Le strategie didattiche messe in campo durante le lezioni sono quelle tipiche di Klein: una grande quantità di esempi in ogni fase della lezione, a partire dai quali vengono sviluppati i teoremi generali, costruiti i passaggi tra diverse nozioni oppure illustrate le dimostrazioni. Gli esempi servono a dare una concreta motivazione alle definizioni, alle proprietà e alle proposizioni presentate.

Il manoscritto è quindi anche una testimonianza del modo in cui Klein, durante la lezione, considerava e analizzava i problemi, commentava i risultati e poneva domande, ovvero dei suoi metodi di insegnamento.