

VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS, DE SECCIÓN CIRCULAR VARIABLE Y YACENTES SOBRE UN SUELO PASTERNAK-KERR MODIFICADO

N. Auciello¹, M.A. De Rosa¹, C. Franciosi¹, M. Lippiello² y M.J. Maurizi³.

¹*Dipartimento di Strutture, Geotecnica, Geologia Applicata all'Ingegneria
Università degli Studi della Basilicata, Viale dell'Ateneo Lucano 10,
85100, Potenza, Italia. E-mail: mderosa@unibas.it*

²*Dipartimento di Costruzioni e Metodi Matematici in Architettura (CoMMA)
Via Forno Vecchio 36, 80134, Napoli, Italia. E-mail: maria.lippiello@unina.it*

³*Instituto de Mecánica Aplicada (IMA) – Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina
E-mail. ima@criba.edu.ar*

RESUMEN

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar las vibraciones libres de vigas de sección circular variable, simplemente apoyadas en sus extremos y que reposan sobre un suelo Pasternak-Kerr modificado.

El modelo toma en cuenta que las vigas en cuestión están ubicadas sobre un estrato múltiple, el cual comprende: un suelo Pasternak-Kerr con su coeficiente de fundación, seguido en profundidad por una viga continua con rigidez y masa conocidas, y por último, otra capa de suelo Pasternak-Kerr con características diferentes al precedente.

Para obtener la solución del sistema se adopta el método de cuadratura diferencial, el cual ha emergido como una herramienta de discretización numérica poderosa en la solución de una gran variedad de problemas de las ciencias físicas e ingenieriles.

Los ejemplos propuestos suministran valores de las frecuencias libres de vibración de las vigas en función del coeficiente de variación de la sección y de los coeficientes que caracterizan al suelo.

Palabras Claves: vibraciones libres, suelo tipo Pasternak-Kerr modificado, método de cuadratura diferencial.

1. INTRODUCCIÓN

Es muy frecuente la necesidad de modelar el medio fundación ante la acción de las cargas aplicadas. Mientras resulta accesible formular teorías complicadas suponiendo que la fundación obedece a alguna teoría tal como la elasticidad, muchos autores, siguiendo el clásico trabajo de Winkler, han procurado modelos simples para la respuesta de una fundación. Kerr [1] ha suministrado un sumario de distintas teorías y numerosas referencias. Levinson y Bharatha [2] señalaron un aprovechamiento general para modelar fundaciones elásticas basados en métodos directos de la moderna mecánica racional. Muchos de los modelos previos encajan, de una manera natural, dentro de este nuevo desarrollo.

El sistema estructural que sirve de título al trabajo es propuesto de forma que, en su estudio, la viga de sección variable y el estrato de suelo con rigidez asignada, dispuestos paralelamente, puedan considerarse como dos vigas vinculadas entre si por un suelo elástico, y apoyado el conjunto a su vez sobre otro suelo elástico.

Tanto por las exigencias de diseño como para el conocimiento específico de las condiciones de resistencia, resulta primordial conocer el comportamiento dinámico del conjunto (frecuencias y modos de vibración), más aún, en función de los parámetros involucrados.

Para la solución del problema se acude al método de la cuadratura diferencial, brillantemente descrito por Bert y Malik [3] en 1996 y aplicado con amplitud por Chen y otros [4]. Se suma a ellos la posterior variación formulada por De Rosa y Franciosi [5] y la experiencia alcanzada por estos últimos cuando lo emplean en el cálculo de las vibraciones libres de vigas simplemente apoyadas [6].

2. FORMULACIÓN ANALÍTICA

Sean k_{w1} y k_{p1} los coeficientes elásticos de Winkler y de Pasternak-Kerr correspondientes al primer estrato de suelo, y k_{w2} y k_{p2} , los que identifican al segundo estrato (Figura 1).

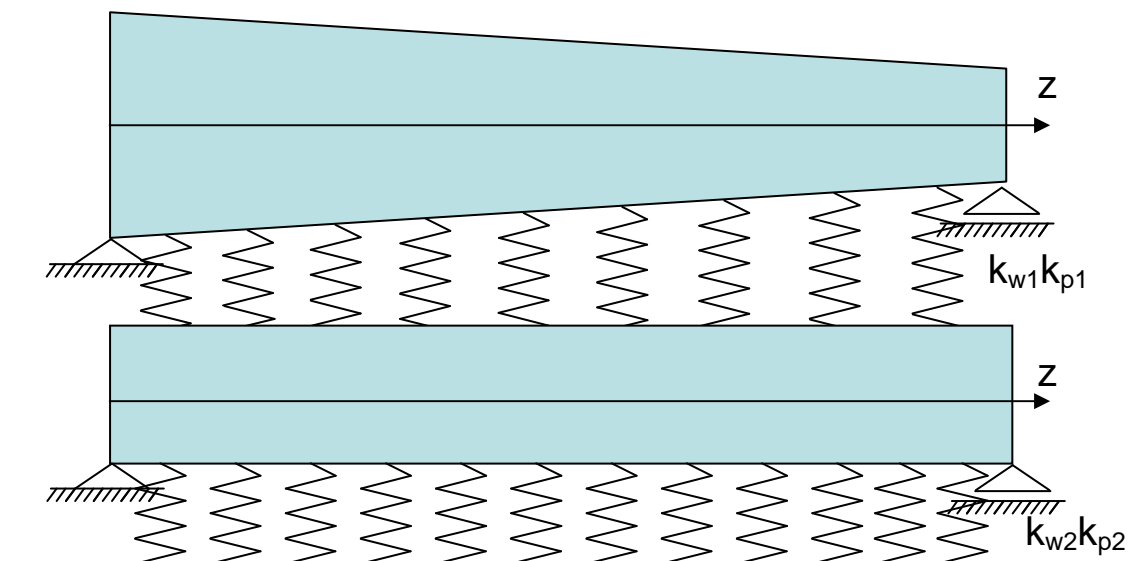


Figura 1: Sistema estructural analizado.

Usando la teoría de vigas de Bernoulli-Euler para las vibraciones libres del sistema doble-viga, donde la primera es de sección variable y la segunda, que representa al suelo, tiene sección constante y está inmersa en un suelo Pasternak-Kerr, se arriba al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 & EI_1 4q(4q-1) \frac{e^2}{L^2} g(z)^{(4q-2)} v_1''(z) + EI_1 8q \frac{e}{L} g(z)^{(4q-1)} v_1'''(z) + \\
 & EI_1 g(z)^{4q} v_1''''(z) - \rho A_1 g(z)^{2q} \omega^2 v_1(z) - k_{p1} (v_1''(z) - v_2''(z)) + \\
 & k_{w1} (v_1(z) - v_2(z)) = 0 \\
 & EI_2 v_2''''(z) - \rho A_2 \omega^2 v_2(z) - (k_{p1} + k_{p2}) v_2''(z) + k_{p1} v_1''(z) + \\
 & (k_{w1} + k_{w2}) v_2(z) - k_{w1} v_1(z) = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $v_1(z)$ y $v_2(z)$ son los desplazamientos transversales de la primera y segunda viga. El momento de inercia $I_1(z)$ y el área $A_1(z)$ de la primera viga, están dadas por:

$$\begin{aligned}
 I_1(z) &= \frac{\pi r_0^4}{4} \left(1 + \frac{e z}{L}\right)^{4q}; & A_1(z) &= \pi r_0^2 \left(1 + \frac{e z}{L}\right)^{2q} \\
 I_0 &= \frac{\pi r_0^4}{4}; & A_0 &= \pi r_0^2; & g(z) &= \left(1 + \frac{e z}{L}\right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

siendo r_0 el radio de la sección circular inicial, e un coeficiente de la ley de variación del radio de la sección y q un exponente de dicha ley. Además, I_2 y A_2 son el momento de inercia y el área constantes de la segunda viga. Sustituyendo las expresiones anteriores en el sistema indicado como Ecuación (1), ahora resulta:

$$\begin{aligned}
 & K_1 4q(4q-1) \frac{e^2}{L^2} g(z)^{(4q-2)} v_1'' + K_1 8q \frac{e}{L} g(z)^{(4q-1)} v_1''' + \\
 & + K_1 g(z)^{4q} v_1'''' - m_1 g(z)^{2q} \omega^2 v_1 - k_{p1} (v_1'' - v_2'') + k_{w1} (v_1 - v_2) = 0 \\
 & K_2 v_2'''' - m_2 \omega^2 v_2 - (k_{p1} + k_{p2}) v_2'' + k_{p1} v_1'' + (k_{w1} + k_{w2}) v_2 - k_{w1} v_1 = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

con $K_1 = EI_1$, $m_1 = \rho A_1$, $K_2 = EI_2$ y $m_2 = \rho A_2$, siendo ω^2 la frecuencia de vibración libre del sistema.

Para el esquema de viga simplemente apoyada, las condiciones de borde son:

$$v_i(0, t) = v_i''(0, t) = v_i(L, t) = v_i''(L, t) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{4}$$

Se pasa ahora del dominio físico $[0, L]$ al dominio natural Gaussiano $[-1, 1]$ a través de la siguiente transformación:

$$\zeta = 2 \frac{z}{L} - 1 \tag{5}$$

Entonces la ley de variación $g(z)$ asume la forma:

$$f(\zeta) = \left(1 + \frac{e}{2} (\zeta + 1)\right) \tag{6}$$

La posterior sustitución de las Ecuaciones (5) y (6) en las ecuaciones del sistema (3) hace que asuman las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 & f(\zeta)^{2q} v_1'''(\zeta) + 4qef(\zeta)^{(2q-1)} v_1'''(\zeta) + q(4q-1)e^2 f(\zeta)^{(2q-2)} v_1'''(\zeta) - \\
 & \Omega_1 \omega^2 v_1(\zeta) + \frac{K_{p11}}{f(\zeta)^{2q}} (v_1''(\zeta) - v_2''(\zeta)) + \frac{K_{w11}}{f(\zeta)^{2q}} (v_1(\zeta) - v_2(\zeta)) = 0 \\
 & v_2'''(\zeta) - \Omega_2 \omega^2 v_2(\zeta) - (K_{p12} + K_{p22}) v_2''(\zeta) + K_{p12} v_1''(\zeta) + \\
 & (K_{w12} + K_{w22}) v_2(\zeta) - K_{w12} v_1(\zeta) = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= \frac{m_1 L^4}{16K_1}, & \Omega_2 &= \frac{m_2 L^4}{16K_2} \\
 K_{p11} &= \frac{k_{p1} L^2}{4K_1}, & K_{p12} &= \frac{k_{p1} L^2}{4K_2}, & K_{p22} &= \frac{k_{p2} L^2}{4K_2}, \\
 K_{w11} &= \frac{k_{w1} L^4}{16K_1}, & K_{w12} &= \frac{k_{w1} L^4}{16K_2}, & K_{w22} &= \frac{k_{w2} L^4}{16K_2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Las condiciones en los límites del nuevo dominio devienen ahora:

$$\begin{aligned}
 v_i(\zeta = -1) &= 0; & v_i''(\zeta = -1) &= 0; \\
 v_i(\zeta = 1) &= 0; & v_i''(\zeta = 1) &= 0; & i &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{9}$$

3. MÉTODO DE LA CUADRATURA DIFERENCIAL

Con el fin de discretizar las ecuaciones diferenciales del sistema (7), se subdivide el intervalo natural de cada una de ellas en n segmentos definidos por $n+1$ puntos situados en las abscisas $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$. Para hacerlo realidad se asumen $n+7$ incógnitas nodales:

$$\mathbf{d}^T = (u_1, u_1', u_1'', u_1''', u_2, \dots, u_{n+1}, u_{n+1}', u_{n+1}'', u_{n+1}''') \tag{10}$$

en concreto, el desplazamiento en cada punto nodal y las primeras tres derivadas de los puntos extremos.

El desplazamiento $v(\zeta)$ puede ser así aproximado:

$$v(\zeta) = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{n+7} \alpha_i C_i \tag{11}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$ el vector fila de los monomios y \mathbf{C} el vector columna de las coordenadas lagrangeanas.

Se puede atribuir a $\boldsymbol{\alpha}$ la siguiente serie:

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n+6}) \tag{12}$$

donde los puntos nodales están así definidos:

$$\zeta_i = \frac{2(i-1)-n}{n}; \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \tag{13}$$

Las primeras tres derivadas del desplazamiento $v(\zeta)$ son:

$$v'(\zeta) = \alpha' C; \quad v''(\zeta) = \alpha'' C; \quad v'''(\zeta) = \alpha''' C \quad (14)$$

y su posterior sustitución en la Ecuación (10), permite escribir:

$$\mathbf{d} = (\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1''', \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}', \alpha_{n+1}'', \alpha_{n+1}''')^T C = N_0 C \quad (15)$$

Si se sigue el mismo procedimiento empleado por Chen y otros [4], se obtiene:

$$\mathbf{A} = N_0' N_0^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} \quad (16)$$

En lo que respecta a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, es necesario adoptar $2(n+7)$ incógnitas nodales. El sistema, expresado como en [7,8], tiene a \mathbf{L} como la versión discretizada del operador diferencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & f(\zeta)^{2q} \partial^4 / \partial \zeta^4 + 4eqf(\zeta)^{2q-1} \partial^3 / \partial \zeta^3 + \\ & \left[(e^2 q(4q-1)) f(\zeta)^{2q-2} - \frac{K_{w11}}{f(\zeta)^{2q}} \right] \partial^2 / \partial \zeta^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_2 = \partial^4 / \partial \zeta^4 - (K_{p12} + K_{p22}) \partial^2 / \partial \zeta^2 \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{K_{p11}}{f(\zeta)^{2q}} \partial^2 / \partial \zeta^2 \quad (19)$$

$$\mathcal{L}_2 = K_{p12} \partial^2 / \partial \zeta^2 \quad (20)$$

En consecuencia será

$$L_{ij}^1 = (f_i)^{2q} D_{ij} + 4eq(f_i)^{2q-1} G_{ij} + \left[(e^2 q(4q-1))(f_i)^{2q-2} - \frac{K_{w11}}{(f_i)^{2q}} \right] B_{ij}; \quad i, j = (1, (n+7)) \quad (21)$$

$$L_{ij}^2 = D_{ij} - (K_{p12} + K_{p22}) B_{ij}; \quad i, j = (n+8), 2(n+7) \quad (22)$$

$$\mathcal{L}_{ij}^1 = \frac{K_{p11}}{f(\zeta)^{2q}} B_{ij}; \quad i = 1, (n+7) \quad \text{y} \quad j = (n+8), 2(n+7) \quad (23)$$

$$\mathcal{L}_{ij}^2 = K_{p12} B_{ij}; \quad i = (n+8), 2(n+7) \quad \text{y} \quad j = 1, (n+7) \quad (24)$$

y $\mathbf{\Omega}$ es la matriz diagonal, cuyos términos están dados por los valores $\mathbf{\Omega}_1$, para $i = 1, (n+7)$

y $\mathbf{\Omega}_2$ para $i = (n+8), 2(n+7)$, valores reportados en las Ecuaciones (8).

Se imponen ahora las condiciones en los límites de la Ecuación (9). A continuación es conveniente permutar las filas (y las columnas) $(n+4)$, $(n+6)$, $(n+8)$, $(n+10)$, $(2n+11)$ y $(2n+13)$ con las filas (y columnas) 2, 4, 5, 6, 7, 8 por lo cual resulta ser una matriz particionada de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}_{aa} & \mathbf{L}_{ab} \\ \mathbf{L}_{ba} & \mathbf{L}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \mathbf{c} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \Omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (25)$$

con \mathbf{L}_{aa} de dimensión (8×8) , y es la matriz identidad \mathbf{I} , \mathbf{L}_{ab} de dimensión $(8 \times (2n+6))$ y es la matriz nula, \mathbf{L}_{ba} de dimensión $((2n+6) \times 8)$, y finalmente \mathbf{L}_{bb} de dimensión $((2n+6) \times (2n+6))$. A su vez, el vector $\mathbf{w} \mathbf{c}$ define las condiciones en los límites, cuatro para la primera viga y cuatro para la segunda. Por lo tanto, se llega así al siguiente problema de autovalores:

$$(\mathbf{L}_{bb} \Omega^{-1} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (26)$$

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se pretende examinar una viga de sección variable, cuyas características geométricas y físicas son:

$$K_1 = EI_0 = 4 \times 10^6 \text{ Nm}^2, \quad m_1 = \rho A_0 = 1 \times 10^2 \text{ Kgm}^{-1}, \quad L = 10 \text{ m}$$

Además, pueden variar los parámetros e y q , y se fijan los intervalos de variación de los coeficientes k_w y k_p del suelo modificado, relativamente al primer y tercer estrato:

$$k_w = k_{w1} = k_{w2} \in [0,5] 10^5 \text{ Nm}^{-2}; \quad k_p = k_{p1} = k_{p2} \in [0,5] 10^4 \text{ N}$$

En cambio, el estrato intermedio está constituido por un suelo tipo "arena densa", cuyas características físicas son: $E_s = 80.000.000 \text{ N/m}^2$ y $\rho_s = 5 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$.

Por otra parte, se supone que el mismo tiene una altura t variable: $t \in [0.1; 0.5] \text{ m}$, por lo cual se pueden verificar las siguientes características:

$$K_2 = E_s I_2 = 6666 \text{ Nm}^2, \quad m_2 = \rho_s A_2 = 500 \text{ Kgm}^{-1} \quad \text{para } t = 0.1 \text{ m}$$

$$K_2 = E_s I_2 = 53333 \text{ Nm}^2, \quad m_2 = \rho_s A_2 = 1000 \text{ Kgm}^{-1} \quad \text{para } t = 0.2 \text{ m}$$

$$K_2 = E_s I_2 = 180000 \text{ Nm}^2, \quad m_2 = \rho_s A_2 = 1500 \text{ Kgm}^{-1} \quad \text{para } t = 0.3 \text{ m}$$

$$K_2 = E_s I_2 = 426667 \text{ Nm}^2, \quad m_2 = \rho_s A_2 = 2000 \text{ Kgm}^{-1} \quad \text{para } t = 0.4 \text{ m}$$

$$K_2 = E_s I_2 = 833333 \text{ Nm}^2, \quad m_2 = \rho_s A_2 = 2500 \text{ Kgm}^{-1} \quad \text{para } t = 0.5 \text{ m}$$

En la Tabla 1 se indican las frecuencias libres de vibración de la viga de sección variable y del suelo intermedio señaladas con ω_{1n} , ω_{2n} . El primer índice 1 representa el autovalor correspondiente a la viga de sección variable, mientras el índice 2 el relativo al suelo arena densa, y $n = 1, 2$ la primera y segunda frecuencia. Se fijan el coeficiente $e = +0.5$ (altura variable creciente) y el exponente $q = 1$. La altura t varía.

Tabla 1 Valores de las frecuencias ω_{1n} y ω_{2n} en función de $e = +0.5$, $q = 1$ y t variable.

$e = 0.5$		$q = 1$	
$k_w = k_p = 0$	n	1	2
$t = 0.1$	ω_{1n}	24.1483	98.1088
	ω_{2n}	0.3604	1.4415
$t = 0.2$	ω_{1n}	24.1483	98.1088
	ω_{2n}	0.7208	2.8831
$t = 0.3$	ω_{1n}	24.1483	98.1088
	ω_{2n}	1.0812	4.3246
$t = 0.4$	ω_{1n}	24.1483	98.1088
	ω_{2n}	1.4416	5.7662
$t = 0.5$	ω_{1n}	24.1483	98.1088
	ω_{2n}	1.8019	7.2077
$k_w = 2 \times 10^5, k_p = 2 \times 10^4$		n	1 2
$t = 0.1$	ω_{1n}	47.4798	105.307
	ω_{2n}	21.0502	27.8923
$t = 0.2$	ω_{1n}	45.2822	105.167
	ω_{2n}	15.6216	19.9344
$t = 0.3$	ω_{1n}	44.6373	105.122
	ω_{2n}	12.9713	16.6823
$t = 0.4$	ω_{1n}	44.3319	105.100
	ω_{2n}	11.3641	15.0989
$t = 0.5$	ω_{1n}	44.1542	105.087
	ω_{2n}	10.2824	14.4124
$k_w = 5 \times 10^5, k_p = 5 \times 10^4$		n	1 2
$t = 0.1$	ω_{1n}	70.3395	116.089
	ω_{2n}	30.0242	42.0082
$t = 0.2$	ω_{1n}	65.7848	115.341
	ω_{2n}	22.7097	30.0230
$t = 0.3$	ω_{1n}	64.4149	115.1113
	ω_{2n}	18.9583	24.8336
$t = 0.4$	ω_{1n}	63.7625	115.000
	ω_{2n}	16.6225	21.9707
$t = 0.5$	ω_{1n}	63.3820	114.939
	ω_{2n}	15.0099	20.2953

La primera serie de valores se obtienen para $k_w = k_p = 0$, por lo cual las frecuencias son las clásicas de una viga de sección variable simplemente apoyada y una viga de sección constante, también ella con la misma vinculación. Se observa también que la primera y segunda frecuencia de la viga de sección variable aumentan con el incremento de los coeficientes de fundación k_w y k_p del suelo a la Pasternak-Kerr, mientras decrecen con el aumento del espesor t del suelo intermedio.

Si bien no se confecciona una segunda tabla por tener en cuenta la limitación de espacio, se han calculado las frecuencias libres de vibración correspondientes a la viga de sección variable y del suelo intermedio de arena densa, con $e = -0.5$ (decreciente), $q = 1$ y t variable.

Se puede notar que la variación de sección juega un rol importante sobre las frecuencias. De hecho, para $e = -0.5$ (sección variable decreciente) las frecuencias ω_{11} y ω_{12} son mayores que las obtenidas para $e = +0.5$ (sección variable creciente), mientras las frecuencias libres del suelo intermedio ω_{21} y ω_{22} resultan ser más bajas.

5. CONCLUSIONES

Este artículo reseña el cálculo de las vibraciones libres de un modelo constituido por una viga simplemente apoyada, de sección variable y directriz circular, apoyada sobre un suelo Pasternak-Kerr modificado, el cual está integrado por un estrato con coeficiente elástico de suelo Winkler k_{w1} y coeficiente elástico de Pasternak k_{p1} , por un estrato de suelo con rigidez y masa conocidas, tales de poderlo considerar como una ulterior viga, y finalmente, otro estrato de suelo a la Pasternak-Kerr con coeficientes elásticos iguales a k_{w2} y k_{p2} .

Obtenido el sistema de ecuaciones diferenciales, se lo ha discretizado oportunamente con el método de cuadratura diferencial. A continuación, con adecuadas manipulaciones sobre las condiciones de vínculo se calculan las frecuencias arriba mencionadas.

La metodología así desarrollada tiene aplicación inmediata en el cálculo de las vibraciones libres de sistemas mono y bidimensionales con vínculos elásticos.

6. REFERENCIAS

- [1] A. D. Kerr, Elastic and viscoelastic foundation models, *J. Appl. Mech.*, **Vol.** 31, pp. 491-498, 1964.
- [2] M. Levinson, S. Bharatha, Elastic foundation models. A new approach, *Proceedings of the Fourth Symposium of Engineering Applications of Solid Mechanics*, Ontario, Canadá, **Vol.** 1, pp. 178-189, 1978
- [3] C. W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics, *Appl. Mech. Rev.*, **Vol.** 49, N° 1, pp. 1-28, 1996.

- [4] W. Chen, A. G. Striz, C. W. Bert, A new approach to the differential quadrature method for fourth-order equations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **Vol.** 40, pp.1941-1956, 1997.
- [5] M. A. De Rosa, C. Franciosi, On natural boundary conditions and DQM, *Mech. Res. Comm.*, **Vol.** 25(3), pp. 279-286, 1998.
- [6] M. A. De Rosa, C. Franciosi, Non-classical boundary conditions and DQM, *J. of Sound and Vibr.*, **Vol.** 212(4), pp. 743-748, 1998.
- [7] M. A. De Rosa, M. Lippiello, Non-classical boundary conditions and DQM four double-beams, *Mech. Res. Comm.*, **Vol.** 34(7-8), 538-544, 2007.
- [8] M. A. De Rosa, N. M. Auciello, M. Lippiello, Dynamic stability analysis and DQM for beams with variable cross-section, *Mech. Res. Comm.*, **Vol.** 35(3), pp. 187-192, 2008.