

ICIRBM - 2020  
PROCEEDINGS OF ITALIAN CONFERENCE  
ON INTEGRATED RIVER BASIN MANAGEMENT  
UNIVERSITY OF CALABRIA, ITALY

# TECNICHE PER LA DIFESA DEL SUOLO E DALL'INQUINAMENTO

# TECHNOLOGIES FOR INTEGRATED RIVER BASIN MANAGEMENT

*A cura di*

**GIUSEPPE FREGA & FRANCESCO MACCHIONE**

*Editors*

*ESTRATTO*

**Volume 41 - 2020**



**ICIRBM - 2020**

**TECNICHE PER LA DIFESA DEL SUOLO  
E DALL'INQUINAMENTO**

**TECHNOLOGIES FOR INTEGRATED  
RIVER BASIN MANAGEMENT**

**Volume 41 - 2020**



UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'AMBIENTE  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE  
LABORATORIO DI MODELLISTICA NUMERICA PER LA PROTEZIONE IDRAULICA DEL TERRITORIO (LAMPIT)  
CENTRO STUDI ACQUEDOTTI E FOGNATURE  
ASSOCIAZIONE IDROTECNICA ITALIANA  
SEZIONE CALABRIA

# Tecniche per la Difesa del Suolo e dall'Inquinamento

ATTI DELLA XLI EDIZIONE  
2020

## Technologies for Integrated River Basin Management

PROCEEDINGS OF ITALIAN CONFERENCE ON INTEGRATED RIVER BASIN MANAGEMENT  
(ICIRBM 2020)  
UNIVERSITY OF CALABRIA, ITALY

**Volume 41 - 2020**

*a cura di*  
**Giuseppe Frega & Francesco Macchione**  
*Editors*



UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA  
DELL'AMBIENTE



UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA  
DIPARTIMENTO DI  
INGEGNERIA CIVILE  
DINCI



Sezione Calabria

**EdiBios**

ISBN: 978-88-97181-75-0

ISSN 2282-5517

© 2020 EdiBios di Irene Olivieri  
Via G. De Rada, 10 - 87100 Cosenza (CS)  
Sito web: [www.edibios.it](http://www.edibios.it) - E-mail: [info@edibios.it](mailto:info@edibios.it)

Foto di copertina di Gianni Termine

---

Tutti i diritti riservati – *All rights reserved*

---

Nessuna parte del presente volume può essere riprodotta con qualsiasi mezzo (fotocopia compresa) senza il permesso scritto dell'editore

---

Finito di stampare nel mese di Ottobre 2020

# RETICOLI IDROGRAFICI COMPLESSI: GRAFI ORIENTATI, LEGGI DI SCALA E CONFLITTO DI ENTROPIA

## COMPLEX RIVER NETWORKS: DIRECTED GRAPHS, SCALING LAWS AND ENTROPY COMPETITION

*Giovanna Andrulli, Antonio Sanchirico, Silvano Fortunato Dal Sasso, Mauro Fiorentino*

Dipartimento delle Culture Europee e del Mediterraneo, Università degli Studi della Basilicata,  
Via Lanera, 75100, Matera

**Extended abstract.** River networks represent a superb example of complex networks, whose ubiquitous scale-invariance topology governing the system dynamics has in recent decades become an important paradigm to study a large number of phenomena in various scientific fields. Within this theoretical frame, in this paper we will describe a drainage network as a particular directed graph, whose out-degrees capture the hierarchical organization of the width function, whereas edges entering a node describe the mechanisms controlling the contributing area aggregation upstream a fluvial junction.

Grounded on a variational approach borrowed from statistical mechanics, we present evidence of the occurrence of two classes of complex networks, which differ each other on the basis of both the morphological structure exhibited by the net and the energy content available to the system.

In particular, the sources of a river network, whose number is assumed to be a fraction of the total in-degree fluvial junctions, grow within a closed surface strongly subject to tectonic constraints, which prevent the fluvial system to develop in terms of hydraulic processes. By consequence, at the mountain ridge areas of a river basin, in the attempt to mutual balance the energy content of their own constitutive elements, the system will try to reach an equilibrium configuration which is described by a power-law in-degree distribution of nodes that well agrees with the scaling law exhibited by the total contributing areas.

On the contrary, in low-gradient tectonically inactive areas, the network organization is driven by local erosional dynamics depending on the soil lithology, as well as the hydraulic laws governing the surface runoff. Due to the control exerted on fluvial channelization and area aggregation processes, the erosional dynamics are given as a function of the out-degree fluvial junctions, which describes the topological level of the river network too. Such dynamical processes express themselves through a constraint that accounts for the system evolution as a whole and integrates its energy content so as to modify the equilibrium state. Therefore, this latter will no longer display a pure power-law topology, but it will be described by a less heterogeneous structure for connections, just as it happens for the width function of a river network.

Validation of the model was conducted by using data from six rivers in Southern Italy. For each of them, a Digital Elevation Model, which describes the basin through a square grid net and provides the elevation level of the grid centroid, was used. The planar structure of drainage network was automatically derived based on local elevation gradient. For all river network characteristics here considered, the estimated probability distributions were found in a good agreement with those suggested by the invoked theoretical approach.

**Sommario.** I reticoli idrografici naturali sono un superbo esempio di rete complessa, la cui topologia ad invarianza di scala, praticamente ubiqua in natura e governante il comportamento dinamico del sistema, è divenuta negli ultimi decenni un formidabile paradigma interpretativo per l'analisi di un gran numero di fenomeni in numerosi ambiti disciplinari.

In questo lavoro, in linea con tale cornice teorica, la rete di drenaggio naturale è rappresentata come un particolare tipo di grafo orientato, i cui archi in uscita esprimono l'organizzazione gerarchica della funzione di larghezza, mentre gli archi in ingresso rappresentano un indicatore dei processi di aggregazione delle aree contribuenti a monte delle giunzioni fluviali.

Sulla base di un approccio variazionale mutuato dalla meccanica statistica, viene mostrata l'evidenza di due classi distinte di reti complesse, le quali differiscono tra loro sia per la struttura morfologica esibita dalla rete che per il contenuto energetico di cui il sistema fluviale dispone. In particolare, le sorgenti di un reticolo idrografico, il cui numero è assunto proporzionale alle connettività in ingresso delle giunzioni fluviali, si sviluppano all'interno di una superficie chiusa e fortemente controllata dalle condizioni tettoniche, le quali impediscono che il sistema si organizzi in termini di processi fluviali di natura idraulica. Ne consegue che, in corrispondenza delle aree di cresta di un bacino idrografico, nel tentativo di equilibrare il contenuto energetico dei propri elementi costitutivi, il sistema tende verso una configurazione di equilibrio caratterizzata da una distribuzione del grado in ingresso dei nodi a legge di potenza, la quale interpreta bene il comportamento di scala esibito dalle aree contribuenti.

Al contrario, l'organizzazione del reticolo idrografico formatosi nelle zone del bacino a più bassa pendenza e tettonicamente inattive è dominata da dinamiche erosive dipendenti dalle condizioni litologiche del suolo, oltre che dalle leggi idrauliche che ne regolano il deflusso superficiale. Governando i processi di canalizzazione ed aggregazione della rete fluviale, tali dinamiche erosive sono definite in funzione della connettività uscente dalle giunzioni fluviali, la quale descrive al contempo il livello topologico del reticolo, e si configurano attraverso un vincolo che è espressione dell'evoluzione globale del sistema e che pertanto ne integra il contenuto energetico, modificandone la configurazione di equilibrio. Quest'ultima allora non manifesta più una topologia caratterizzata da una legge di potenza pura, ma è descritta da una struttura delle connessioni meno eterogenea, così come accade per la funzione di larghezza di un reticolo idrografico naturale.

La validazione del modello è stata condotta con riferimento a sei bacini lucani.

## 1. Teoria delle reti complesse e reticoli idrografici naturali

Fondata sulla nozione di grafo, la teoria delle reti complesse si è recentemente affermata come un potente paradigma per l'analisi di un gran numero di fenomeni fisici descrittivi il comportamento di sistemi complessi, sia naturali che artificiali (Barabási, 2012), le cui dinamiche soggiacenti generano una varietà di strutture regolari caratterizzate tra l'altro dall'assenza di una scala caratteristica (Barabási and Albert, 1999). Considerata da molti autori come la firma statistica di processi di auto-organizzazione e di stato critico (Bak et al., 1987), la proprietà di invarianza di scala si riflette in una serie di distribuzioni di probabilità a legge di potenza per le principali variabili costituenti il sistema (Albert and Barabási, 2002).

Di particolare importanza, specie per la regolazione dei flussi di materia, energia ed informazione attraverso le superfici di contorno che separano un sistema dall'ambiente esterno (Banavar et al., 1999), le strutture reticolari ad albero rappresentano una particolare sottoclasse di reti complesse caratterizzate dall'assenza di percorsi chiusi tra gli elementi della rete.

A tale sottoclasse appartengono le reti di drenaggio naturali, le cui straordinarie similarità delle parti con il tutto, da lungo tempo note alla comunità scientifica (Rodríguez-Iturbe and Rinaldo, 1997), sono assurde ad esempio paradigmatico di strutture frattali (Mandelbrot, 1983), le quali sono per l'appunto il prototipo di quegli insiemi auto-simili caratterizzati da invarianza di scala.

La descrizione geometrica dei processi di aggregazione gerarchica di una rete di drenaggio naturale è quindi di grande importanza non solo da un punto di vista puramente applicativo ma anche perché la comprensione dell'origine dinamica delle forme fluviali consente in ultima analisi una più profonda penetrazione all'interno dei meccanismi fondamentali della natura.

### 1.1 Grafo e distribuzione del grado dei nodi

Una rete complessa è un sistema fisico di elementi interagenti rappresentato per mezzo di un grafo, il quale è definito come un insieme di  $N$  nodi, gli elementi del sistema anche chiamati vertici, connessi tra loro attraverso  $M$  archi che ne descrivono le reciproche interazioni. L'utilità di questo schema teorico risiede principalmente nella sua versatilità, potendo interpretare la struttura delle relazioni di una classe estremamente varia di sistemi complessi, che spaziano dalla fisica alla biologia, fino alla scienza della terra (Albert and Barabási, 2002; Dorogovtsev and Mendes, 2002). La proprietà più immediata di un grafo è il grado di un nodo, detto anche connettività, definito come il numero delle connessioni del nodo considerato. La distribuzione del grado, cioè la probabilità che un nodo scelto a caso abbia connettività pari a  $\kappa$ , è definita come la frequenza  $p_\kappa = N_\kappa/N$ , dove



$N_\kappa$  indica il numero di nodi con  $\kappa$  archi. Numerosi studi empirici hanno mostrato che la distribuzione del grado di molte reti complesse del mondo reale obbedisce ad una legge di potenza del tipo

$$p_\kappa \propto \kappa^{-\gamma}, \quad (1)$$

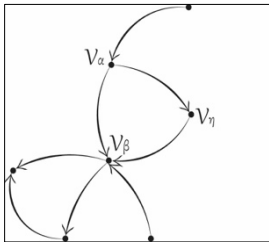
con esponente di scala  $\gamma$  solitamente compreso tra 1 e 3 (Albert and Barabási, 2002; Dorogovtsev and Mendes, 2002). Ciò si riflette in una topologia estremamente eterogenea che vede un gran numero di vertici dotati di pochissimi archi coesistere con un piccolo numero di nodi estremamente connessi. A dispetto della sua semplicità, la distribuzione del grado dei nodi è una grandezza estremamente importante, controllando le dinamiche della rete (Albert et al., 2000; Dorogovtsev et al., 2008). Attraverso l'insieme delle sue connessioni, un nodo è direttamente collegato ad altri  $\kappa$  nodi, così che il grado di un nodo coincide con il numero dei suoi primi confinanti. Indicando rispettivamente con  $C_\kappa = \kappa N_\kappa$  e  $C = \sum_\kappa \kappa N_\kappa$  il numero dei primi confinanti dei nodi di grado  $\kappa$ , ed il numero totale delle connessioni del grafo, la frequenza

$$r_\kappa = \frac{\kappa p_\kappa}{\langle \kappa \rangle} \quad (2)$$

rappresenta la distribuzione del grado dei primi confinanti di un nodo scelto a caso (Newman et al., 2001), dove la connettività media della rete è definita da

$$\sum_\kappa \kappa p_\kappa = \langle \kappa \rangle \quad (3)$$

In questo studio faremo riferimento ad un particolare e più sofisticato tipo di grafo, detto grafo orientato, il quale è caratterizzato da due distinte classi di connettività per ciascun nodo, denominate connettività in ingresso ed uscita, indicate rispettivamente con  $h$  e  $k$ , laddove la prima misura il numero di archi che entrano in un dato nodo, mentre la seconda conta gli archi emanati dallo stesso. Parleremo allora di distribuzione del grado in ingresso ed uscita, rispettivamente  $q_h = N_h/N$  e  $p_k = N_k/N$ , per le probabilità che un nodo scelto a caso abbia connettività in ingresso  $h$  ed in uscita  $k$ , laddove  $N_h$  ed  $N_k$  sono rispettivamente il numero di nodi con  $h$  archi entranti ed il numero di nodi con  $k$  archi uscenti. In figura 1 è rappresentato un grafo diretto avente sette nodi ed otto archi.



**Fig. 1** - Grafo orientato: il nodo  $V_\beta$  ha connettività in ingresso ed uscita rispettivamente pari ad  $h = 3$  e  $k = 2$

**Figure 1** - Directed graph: the in- and out-degree of node  $V_\beta$  are equal to  $h = 3$  e  $k = 2$ , respectively

Per grafi orientati è utile introdurre le seguenti nozioni: con confinante sorgente di un nodo indichiamo il vertice che si trova all'altro estremo di un arco entrante nel nodo considerato, mentre un confinante bersaglio di un nodo è il primo nodo raggiunto percorrendo l'arco in uscita dal vertice in esame. Sempre in figura 1, abbiamo rispettivamente indicato con  $V_\alpha$  e  $V_\beta$  il confinante sorgente e bersaglio del nodo  $V_\eta$ . Le frequenze

$$f_h = \frac{h q_h}{\langle h \rangle} \text{ ed } r_k = \frac{k p_k}{\langle k \rangle} \quad (4)$$

rappresentano allora rispettivamente la distribuzione del grado in ingresso dei confinanti bersaglio di un nodo scelto a caso e la distribuzione del grado in uscita dei confinanti sorgenti di un nodo scelto a caso. Si noti che, dal momento che ogni arco in uscita da un nodo entra sicuramente in un altro vertice del grafo, i valori medi delle connettività in ingresso ed uscita calcolati sull'intera rete coincidono, vale a dire  $\langle h \rangle = \langle k \rangle$ .

Nel prossimo paragrafo definiremo i criteri secondo cui i reticoli idrografici naturali possono essere assimilati ad un particolare tipo di grafo orientato.

## 1.2 Morfologia dei reticoli idrografici naturali

Facendo uso di un modello digitale del terreno, il quale associa ad ogni cella di una griglia a

maglie quadrate di dimensione caratteristica  $L \times L$  la quota altimetrica del sito corrispondente alla cella considerata, le direzioni di drenaggio sono ricavate a partire dal gradiente locale del campo scalare di elevazione (O'Callaghan and Mark, 1984). La collezione vettoriale delle direzioni di drenaggio definisce quindi la struttura planare del reticolo idrografico.

Ad ogni sito  $x$  della superficie terrestre viene poi assegnato un valore dell'area contribuyente  $a_x$ , definita dall'equazione

$$a_x = 1 + \sum_y a_y, \quad (5)$$

dove la somma è estesa a tutti i siti  $y$  le cui aree sono effettivamente drenate da  $x$  attraverso le direzioni di drenaggio. Numerosi studi empirici (Rodríguez-Iturbe and Rinaldo, 1997) hanno mostrato che la probabilità di eccedenza dell'area contribuyente in un dato punto di un bacino idrografico naturale esibisce una legge di potenza del tipo

$$P(A > a) \propto a^{1-\tau}, \quad (6)$$

dove l'esponente di scala vale  $\tau = 1.43 \pm 0.02$ . Nell'ipotesi di pioggia unitaria uniformemente iniettata su tutto il bacino, la relazione (5) può essere reinterpretata come una misura della portata fluida totale raccolta in un sito. L'inizio del processo di incisione del suolo, che determina la formazione della testa di canale, è allora assunto verificarsi per valori dell'area contribuyente (portata fluida) superiori ad una data soglia  $s$ . Vale la pena sottolineare che questo metodo, oggi diffusamente utilizzato, può presentare criticità per aree sostanzialmente pianeggianti, laddove il trascurare i gradienti di quota tra celle adiacenti può indurre a sovrastimare il numero dei canali di deflusso.

Il reticolo idrografico così ottenuto è rappresentato per mezzo di un albero binario, seguendo un classico schema di letteratura (Shreve, 1966). I nodi esterni dell'albero rappresentano le sorgenti, mentre quelli interni definiscono i punti del reticolo in corrispondenza dei quali due canali confluiscono per formare un singolo tratto fluviale. Il segmento ininterrotto di canale tra due nodi consecutivi è detto *link*. La distanza topologica, indicata con  $i$ , di un nodo dalla sezione di chiusura è definita come il numero di *link* consecutivi tra detto nodo e la sezione di chiusura di un bacino idrografico. Infine, la funzione di larghezza è definita come il diagramma della frequenza  $W_i = N_i/N$  in funzione della distanza topologica, dove con  $N_i$  ed  $N$  abbiamo indicato rispettivamente il numero di nodi ad una certa distanza  $i$  ed il numero totale di nodi del reticolo.

Come è noto, la funzione di larghezza esercita un profondo impatto sui processi idrologici che avvengono alla scala di bacino. Infatti, proiettando su una sola dimensione lineare la struttura planare di ramificazione del reticolo idrografico, tale descrittore morfometrico fornisce la distribuzione delle distanze di percorrenza attraverso la rete di drenaggio e, di conseguenza, nell'ipotesi di velocità costante della corrente, la distribuzione di probabilità dei tempi di residenza delle particelle d'acqua, vale a dire l'idrogramma unitario istantaneo di un bacino idrografico (Troutman and Karlinger, 1985). In particolare, sulla base di considerazioni meccanico-statistiche (Fiorentino et al., 2002), la risposta impulsiva di un bacino idrografico è stata reinterpretata in termini di geometria frattale, pervenendo ad una distribuzione di probabilità dei tempi di residenza di tipo Weibull

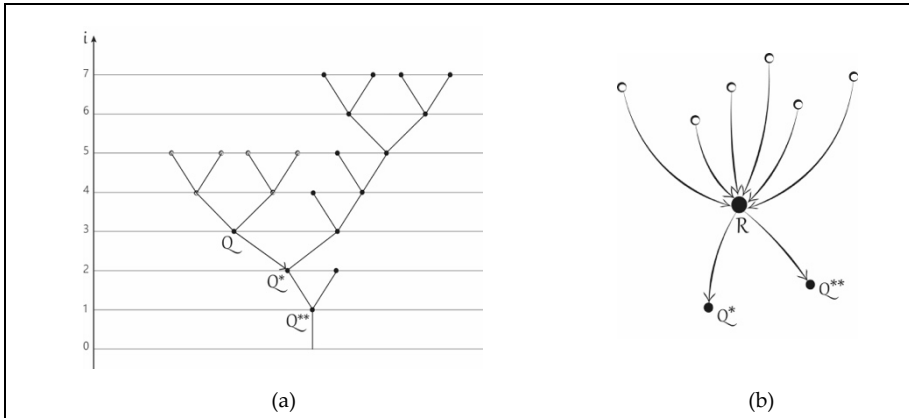
$$p(t) = \frac{d}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{d-1} e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^d}, \quad (7)$$

dove il parametro di forma della distribuzione coincide con la dimensione frattale  $d$  del reticolo idrografico, nell'ipotesi che la misura frattale totale domini i processi di aggregazione fluviale.

Oltre a dare una interpretazione geomorfologica della risposta impulsiva, il modello di reticolo idrografico proposto da Shreve permette di computare l'aggregazione delle aree contribuyente per mezzo dello schema ad albero binario. È infatti immediato convincersi che l'area contribuyente  $a_j$ , calcolata in corrispondenza del nodo  $V_j$ , conta il numero di nodi a monte di  $V_j$  che drenano nel nodo in questione, più il nodo  $V_j$  stesso, vale a dire il numero totale di nodi del sotto-reticolo avente per sezione di chiusura la giunzione fluviale subito a valle di  $V_j$ . Le schiaccianti evidenze empiriche a sostegno della validità di un gran numero di leggi di scala descrittive la morfologia di un bacino idrografico, ed in special modo la relazione (6), suggeriscono che le proprietà statistiche delle reti di drenaggio naturali dipendano dal sistema nel suo complesso, i cui elementi interagenti costituiscono un grafo di nodi ed archi.

Al fine di descrivere la topologia delle connessioni degli elementi di una rete di drenaggio naturale estraiamo il grafo sottostante all'albero di biforcazione, come rappresentato in figura 2. In par-

icolare, sia  $T_N$  un albero binario di  $N$  nodi, il quale può essere posto in corrispondenza biunivoca con un grafo avente  $N$  vertici, denotato con  $G_N$ , in modo che ad ogni nodo di  $T_N$  corrisponda un vertice di  $G_N$ , come di seguito spiegato. Denotiamo rispettivamente con  $Q$  ed  $R$  un generico nodo di  $T_N$  ed il suo nodo isomorfo in  $G_N$ , ed assumiamo che i primi confinanti bersaglio di  $R$  siano i nodi di  $G_N$  isomorfi a tutti i nodi interni di  $T_N$  a valle di  $Q$ , lungo il corrispondente percorso di drenaggio.



**Fig. 2 - (a)** Albero binario radicato; **(b)** Connettività entranti ( $h=7$ ) ed uscenti ( $k=2$ ) del nodo  $R$ , isomorfo a  $Q$ . Le prime risultano pari al numero di nodi a monte di  $Q$ , mentre le seconde uguagliano i nodi del reticolo a valle di  $Q$   
**Figure 2 - (a)** Rooted binary tree; **(b)** In- and out-degree of node  $R$ , isomorphic to  $Q$ , given by  $h=7$  and  $k=2$ , respectively. Connections entering the node  $R$  are the same as the number of nodes upstream node  $Q$ , whereas the out-degree equals all fluvial junctions downstream node  $Q$

Con riferimento a questo schema, è facile rendersi conto che il numero di nodi di  $G_N$  aventi  $k$  archi uscenti è uguale al numero di nodi di  $T_N$  ad una distanza topologica pari a  $k + 1$  dalla sezione di chiusura. A meno di una traslazione di coordinate geografiche, irrilevanti ai fini di una descrizione topologica, la funzione di larghezza del reticolo idrografico coincide allora con la distribuzione del grado uscente dei nodi del suo grafo isomorfo.

Osserviamo che la scelta definitoria del grado uscente di un nodo trova una sua giustificazione fisica nel supposto impatto idrologico che un nodo fluviale esercita sui nodi di valle. Infatti, con riferimento alla figura 2(a), sebbene il nodo  $Q$  sia direttamente collegato soltanto al nodo  $Q^*$  per mezzo di un canale fluviale, tutti i nodi che si trovano a valle di  $Q$  lungo il percorso di drenaggio da esso generato, vale a dire i nodi  $Q^*$  e  $Q^{**}$ , drenano l'unità di flusso prodotta da  $Q$ . In tal modo, il nodo a monte influenza in senso idrologico i nodi che si trovano a valle del medesimo. Inoltre, come detto in precedenza, risultando pari all'area contributiva relativa al nodo  $Q$ , il flusso totale misurato in corrispondenza di  $Q$  è prodotto da tutti i nodi che si trovano a monte dello stesso risalendo lungo le direzioni di drenaggio, nodi rappresentati con cerchi vuoti in figura 2(a). Per quanto stabilito a proposito del significato idrologico della connettività in uscita, ognuno dei nodi a monte di  $Q$ , pensato come vertice del grafo isomorfo, ha tra le altre sue connessioni sicuramente un arco uscente che raggiunge il vertice  $R$ , contribuendo in tal modo al valore della connettività in ingresso di quest'ultimo nodo, vedi figura 2(b). Ne consegue che il numero di nodi di  $G_N$  aventi  $h$  archi entranti è uguale al numero di nodi di  $T_N$  aventi area contributiva pari ad  $a_j - 1$  (con  $a$  definita come nella (5) e l'indice  $j$  variabile tra 1 ed  $N$ ). La distribuzione del grado in ingresso dei nodi di  $G_N$  può pertanto essere assunta come una stima della frequenza delle aree contributive del bacino idrografico drenato dal reticolo idrografico rappresentato da  $T_N$ .

In tal modo due classici argomenti della geomorfologia fluviale, vale a dire la funzione di larghezza di un reticolo idrografico e la probabilità di eccedenza delle aree contributive di un bacino idrografico, sono ricondotti a nozioni ben definite di teoria dei grafi e pertanto interpretabili per mezzo di strumenti matematici propri di tale disciplina.

## 2. Meccanica statistica delle reti complesse

La questione dell'emergenza delle leggi di scala in un sistema complesso è ormai diventato un classico della letteratura scientifica, ampiamente discusso ricorrendo agli approcci teorici più disparati: dall'invocazione di analogie con fenomeni critici (Dorogovtsev et al., 2008) all'introduzione di equazioni stocastiche descriventi l'evoluzione del sistema (Banavar et al., 1997; Barabási and Albert, 1999; Dorogovtsev and Mendes, 2000), fino alla formulazione di problemi variazionali (Park and Newman, 2004; Bianconi, 2007; Sanchirico and Fiorentino, 2008).

D'altra parte, il fatto che le medesime leggi di scala si ripetano sostanzialmente identiche nella forma per le moltissime reti complesse investigate, con valori degli esponenti critici tra l'altro ricadenti all'interno di un limitato numero di classi di universalità, ci lascia supporre che le proprietà statistiche del sistema debbano dipendere da poche e fondamentali caratteristiche comuni, piuttosto che risiedere nei dettagli delle particolari dinamiche soggiacenti. Ne consegue che un approccio mutuato dalla meccanica statistica risulta particolarmente appropriato per l'analisi della struttura topologica delle reti complesse, la cui collezione di elementi interagenti è attesa tendere verso una robusta e stabile configurazione di equilibrio.

### 2.1 Il principio di massima entropia

Fin dalla nascita della teoria dell'informazione (Shannon, 1948), il concetto di entropia, introdotto come misura dell'informazione media relativa alla distribuzione di probabilità di una variabile casuale, si è rivelato uno strumento teorico potente ed estremamente versatile per l'analisi dei sistemi complessi, in special modo per la risoluzione di problemi di inferenza statistica (Jaynes, 1957). Il principio di massima entropia formulato da Jaynes stabilisce infatti che, proprio come un sistema termodinamico raggiunge il massimo grado di disordine all'equilibrio termico, in condizioni di incompleta informazione sul processo stocastico che governa l'evoluzione di un sistema fisico verso una configurazione stazionaria, la distribuzione più probabile della variabile aleatoria che lo descrive è quella che massimizza l'entropia, nel rispetto di un insieme di vincoli depositari della sola informazione disponibile circa lo stato fisico del sistema.

Di seguito assumeremo che i costituenti di una rete complessa agiscano come le particelle di un sistema fisico. Raggruppando allora i nodi in classi di connettività, una misura del contenuto informativo medio racchiuso nella distribuzione del grado dei nodi, definito come  $p_\kappa = N_\kappa/N$ , è data dall'entropia

$$S_p = -\sum_\kappa p_\kappa \ln p_\kappa, \quad (8)$$

la quale rappresenta l'analogia per le reti complesse dell'entropia di sorgente definita da Shannon con riferimento alla probabilità di occorrenza dei simboli in un dato messaggio.

Per un sistema isolato, per il quale sono nulli sia i flussi di energia che di materia con l'ambiente esterno, l'entropia evolve verso un massimo incondizionato che raggiunge in corrispondenza del cosiddetto equilibrio microcanonico, ottenuto massimizzando l'entropia (8) nel rispetto del solo vincolo di normalizzazione  $\sum_\kappa p_\kappa = 1$ . Indicando con  $\Omega$  il numero di classi distinte di connettività, la condizione di massima casualità conduce allora ad una distribuzione uniforme del grado dei nodi, data da  $p_\kappa = 1/\Omega$ , la quale esprime il fatto che per un sistema isolato ogni classe di connettività è ugualmente probabile.

Per un sistema chiuso, il quale se pure non scambia materia con l'ambiente esterno può comunque scambiare energia, la configurazione di equilibrio, detto in questo caso canonico, si ottiene in corrispondenza di un massimo vincolato dell'entropia. L'aspetto cruciale dei metodi di inferenza basati sulla termodinamica statistica consiste proprio nella scelta dei vincoli da imporre per la massimizzazione dell'entropia, i quali definiscono per l'appunto le caratteristiche strutturali del sistema in relazione ai flussi di energia che questo scambia con l'ambiente esterno. Assumendo come vincolo, oltre alla condizione di normalizzazione, la relazione (3), la quale esprime una condizione sulla media d'insieme della connettività della rete, la risoluzione del problema variazionale conduce ad una distribuzione del grado dei nodi di tipo esponenziale  $p_\kappa = K \cdot \exp(-\mu\kappa)$ , la quale rappresenta l'analogia della distribuzione di Maxwell-Boltzmann per una rete complessa. In tale distribuzione, il parametro  $\mu$  corrisponde allora all'inverso di una temperatura generalizzata, mentre la costante  $K$

di normalizzazione è detta funzione di partizione, il cui logaritmo cambiato di segno rappresenta l'energia libera del sistema ed agisce come funzione generatrice del valore atteso dell'energia (la funzione hamiltoniana, vale a dire l'energia totale per nodo, è in tal caso pari a  $\mu k$ ).

Uno schema concettuale di questo tipo è atto a descrivere sistemi chiusi di elementi non interagenti, i quali scambiano energia con l'ambiente esterno, il cui valor medio è assunto come vincolante la distribuzione degli elementi. Ciò equivale allora ad ignorare le connessioni tra gli elementi della rete complessa, laddove l'energia è rappresentata da una proprietà intrinseca dei nodi, numericamente coincidente con la loro connettività ma spogliata di ogni carattere relazionale.

Qualora la struttura delle relazioni tra le parti di un insieme risulti invece rilevante per il controllo della sua organizzazione al pari degli stessi elementi costitutivi, così come implicitamente assunto per quei sistemi la cui topologia è assimilabile ad un grafo, le connessioni diventano cruciali nel governare l'evoluzione della rete complessa verso la configurazione di equilibrio. Come mostrato in (Sanchirico and Fiorentino, 2008), emerge allora un conflitto tra l'insieme dei nodi e quello delle connessioni, quest'ultimo rappresentato dalla collezione dei primi confinanti e governato dalla distribuzione di probabilità (2). Tale conflitto si costituisce come un vincolo interno al sistema e fornisce la descrizione statistica meno distorta delle dinamiche che lo governano. L'aver interpretato nodi e primi confinanti di un grafo come elementi di due insiemi statistici accoppiati consente in particolare di quantificare il grado di informazione delle rispettive distribuzioni di probabilità per mezzo delle due funzioni di entropia

$$S_p = -\sum_{\kappa} p_{\kappa} \ln p_{\kappa} \text{ e } S_r = -\sum_{\kappa} r_{\kappa} \ln r_{\kappa}, \quad (9)$$

le quali tenderanno verso i loro rispettivi massimi vincolandosi a vicenda. Ciò rende conto del vincolo strutturale in precedenza invocato ed al quale d'ora in avanti ci riferiremo come conflitto di entropia. L'equilibrio canonico di una rete complessa si raggiunge allora in corrispondenza della soluzione del problema variazionale che prevede la massimizzazione della prima delle (9), nel rispetto della condizione di normalizzazione e del vincolo

$$\sum_{\kappa} p_{\kappa} \ln \kappa = \langle \ln \kappa \rangle, \quad (10)$$

il quale tiene conto della concomitante tendenza della seconda delle (9) verso la propria configurazione di equilibrio microcanonico. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si perviene allora alla seguente coppia di leggi di potenza per le distribuzioni del grado dei nodi e dei primi confinanti:

$$p_{\kappa} = \frac{\kappa^{-\gamma}}{\zeta(\gamma)} \text{ ed } r_{\kappa} = \frac{\kappa^{-(\gamma-1)}}{\zeta(\gamma-1)}, \quad (11)$$

dove la funzione di partizione dell'insieme canonico è rappresentata dalla funzione zeta di Riemann, definita come  $\zeta(\gamma) = \sum_{k \geq 1} k^{-\gamma}$  e convergente per  $\gamma > 1$ . Osserviamo che in questo caso è l'esponente di scala  $\gamma$  a rappresentare l'inverso della temperatura generalizzata nel limite per temperatura infinitamente grandi, la prima delle (11) si riduce infatti alla distribuzione microcanonica  $p_{\kappa} = 1/\Omega$ . Infine, il logaritmo cambiato di segno della funzione di partizione, che rappresenta ancora l'energia libera dell'insieme canonico, agisce come funzione generatrice del valore atteso dell'energia interna, secondo la relazione

$$-\frac{\partial \ln \zeta(\gamma)}{\partial \gamma} = \langle \ln \kappa \rangle, \quad (12)$$

dove si deduce che, in questo caso, la funzione hamiltoniana è pari a  $\gamma \ln k$ .

Vale la pena sottolineare che, rispetto allo schema teorico alla base della distribuzione di Maxwell-Boltzmann, gli stati del sistema sono qui identificati per mezzo dei differenti valori della connettività, la quale rappresenta un parametro puramente topologico. L'espressione della funzione hamiltoniana, e quindi del valor medio dell'energia, non è stata assunta a priori ma emerge in conseguenza dell'organizzazione interna del sistema, in accordo con la scelta del vincolo. La differenza cruciale con la distribuzione esponenziale risiede allora proprio nell'espressione del termine energetico che in questo caso risulta più debole, essendo proporzionale al logaritmo delle connessioni, contro una relazione di diretta proporzionalità. In tal modo, l'energia interna al sistema cresce più lentamente in funzione del numero delle connessioni della rete, rispetto alla statistica esponenziale, e di conseguenza il sistema risulta meno vincolato. Ciò si riflette nella forma della lunga coda della legge di potenza, il cui andamento tende maggiormente all'uniformità rispetto al più rapido deca-

dimento esponenziale. In tali condizioni, il caso domina l'evoluzione del sistema e l'unico vincolo strutturale porta in conto nient'altro che la seconda legge della termodinamica.

## 2.2 Leggi di scala per i reticoli idrografici e conflitto di entropia

Come mostrato nella sezione 1.2, il reticolo idrografico naturale costituisce un particolare tipo di grafo orientato, le cui proprietà di scala governanti l'aggregazione delle aree possono essere ricavate con riferimento alle distribuzioni di probabilità dei nodi e dei primi confinanti, seguendo l'approccio meccanico-statistico discusso al paragrafo precedente.

Sia data allora una rete di drenaggio naturale descritta per mezzo di un albero binario radicato, e consideriamo il grafo orientato ad esso isomorfo, come descritto in figura 2. L'identificazione della distribuzione del grado in ingresso dei nodi con la frequenza delle aree contribuenti del bacino idrografico drenato dal reticolo isomorfo consente di ricavare la probabilità di eccedenza di quest'ultime per mezzo del problema variazionale retto dalla massimizzazione della funzione entropia

$$S_q = -\sum_h q_h \ln q_h, \quad (13)$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

$$\sum_h q_h = 1 \text{ e } \sum_h q_h \ln h = \langle \ln h \rangle, \quad (14)$$

dove la seconda condizione esprime il meccanismo di conflitto tra l'entropia dei nodi di un grafo orientato, definita dalla (13), e l'entropia  $S_f = -\sum_h f_h \ln f_h$  relativa alla distribuzione dei confinanti bersaglio di un nodo scelto a caso, definita dalla prima delle (4). L'applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange fornisce la seguente distribuzione a legge di potenza per il grado in ingresso dei nodi

$$q_h = \frac{h^{-\gamma}}{\zeta(\gamma)}. \quad (15)$$

Assimilando il grado in ingresso di un vertice con l'area contribuente in corrispondenza del nodo ad esso isomorfo, e ricorrendo all'approssimazione continua, dove l'area  $a$  rappresenta la variabile aleatoria che sostituisce la variabile discreta  $h$ , il calcolo della probabilità di superamento fornisce la relazione

$$P(A > a) = a^{1-\tau}, \quad (16)$$

in accordo con la (6), dove il valore sperimentale di  $\tau \approx 1.43$ , ricavato per i bacini idrografici naturali, soddisfa la condizione teorica  $\tau > 1$ , richiesta per la corretta normalizzazione della (15).

L'andamento a legge di potenza (6) della distribuzione delle frequenze delle aree contribuenti, che qui è stato ricavato sulla base di considerazioni meccanico-statistiche, è usualmente imputato a fenomeni critici (Maritan et al., 1996). Di seguito avanziamo l'ipotesi che i due approcci siano in effetti complementari. A tal fine, ricordiamo che un bacino idrografico è delimitato da una linea di displuvio superficiale, identificata dalle creste delle catene montuose che, generate per effetto delle forze tettoniche, formano i contorni fisici del bacino. Lo spartiacque superficiale circonda dunque il bacino all'interno di una limitata regione della superficie terrestre, e tale azione di confinamento opera in maniera più marcata nelle zone montane, dove i processi di canalizzazione alla base dei meccanismi di aggregazione delle aree fluviali sono subordinati all'orografia del territorio.

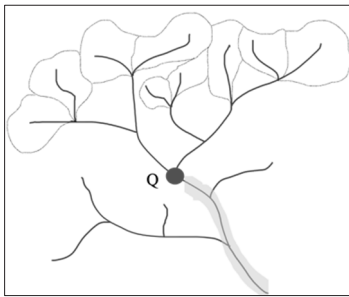
È ben noto infatti che esistono due classi distinte di paesaggi fluviali (Reinhardt and Ellis, 2015), le quali differiscono l'un l'altra in virtù dei distinti controlli esercitati dalla geologia sui processi di erosione che dissezionano il territorio. In particolare, nei paesaggi montani, i processi di versante responsabili dell'incipiente canalizzazione fluviale sono dominati da eventi franosi, soggetti ad un forte controllo geologico, i quali rappresentano un classico esempio di criticità auto-organizzata. Frane e valanghe sono infatti caratterizzate da una distribuzione a legge di potenza tra la frequenza degli eventi e la loro magnitudine, la quale è tra l'altro ritenuta responsabile dell'emergenza di una serie di leggi di scala governanti la morfologia delle catene montuose (Perron et al., 2008).

Assumendo che la portata solida generata da eventi franosi sia proporzionale a quella fluida e, conseguentemente, anche all'area contribuente, possiamo ipotizzare che la distribuzione a legge di potenza (6) sia in qualche modo un surrogato del comportamento di scala caratteristico delle portate solide, in condizioni di criticità auto-organizzata. Risulta allora lecito supporre che, in corrispon-

denza di rilievi montani tettonicamente attivi, dove l'erosione del territorio avanza principalmente per mezzo di eventi franosi, la topologia ad invarianza di scala esibita dai reticoli idrografici naturali, così come espresso dalla distribuzione (6), sia un epifenomeno delle dinamiche critiche, anch'esse libere da una scala caratteristica, che in tali regioni governano la struttura delle formazioni geologiche.

D'altra parte, è anche possibile osservare che l'area  $a$  nella (6) – così come nella (15) – può essere assunta proporzionale al numero  $N$  di nodi costituenti il reticolo fluviale che si è sviluppato al suo interno e che, a sua volta,  $N$  è pari al doppio dei nodi esterni (o sorgenti)  $N_e$  dell'albero binario con cui si rappresenta il reticolo (per l'esattezza, si ha  $N = 2N_e - 1$ ). Ne discende che la (6), e più in particolare la (15), esprimono anche la distribuzione di probabilità dei nodi sorgenti e, pertanto, quella delle aree di cresta del bacino, aree nelle quali l'attivazione del singolo nodo è causata esclusivamente dai fenomeni tettonici di cui si è appena detto.

Per chiarire questo concetto dal punto di vista meccanico-statistico seguito in questo lavoro, è sufficiente pensare al grafo orientato costruito assegnando ad ogni nodo del reticolo, come primi confinanti, i soli  $N_e$  nodi sorgenti connessi ad esso, secondo lo schema rappresentato in figura 3.



**Fig. 3** - Schema sintetico di un reticolo idrografico. Le aree drenanti rappresentate dalle sorgenti a monte del nodo  $Q$  sono circonscritte con linea sottile, mentre il percorso di drenaggio che cattura tutti i nodi interni a valle di  $Q$  è evidenziato con tratto marcato

**Figure 3** - Synthetic scheme of a river network. With regard the node  $Q$ , drainage areas of upstream nodes are denoted by thin lines, and the drainage path of downstream nodes is shown by the highlighted line

In questo modo, con riferimento al grafo che ha condotto alla (15), si modificano gli archi in ingresso in ogni nodo, ma la probabilità che questo nodo abbia  $h_e$  archi entranti è pari a quella  $q_h$  considerata nella (15). Ne discende che questa equazione esprime, a meno di un fattore 2, anche il grado di organizzazione del grafo costruito con riferimento alle sole aree di cresta del bacino. Al contrario, in zone diverse da quelle di cresta, tettonicamente inattive ed a più bassa pendenza, i processi dominanti che hanno originato la rete fluviale sono quelli di canalizzazione che, come è noto, sono governati da meccanismi erosivi fluviali, fortemente dipendenti, oltre che dal gradiente locale delle pendenze, dalle caratteristiche geo-litologiche dei suoli e dalle leggi idrauliche che regolano il deflusso delle acque. Questi ambiti fluviali, interni al reticolo, aprono pertanto alla possibilità di riorganizzare il contenuto energetico del sistema sulla base di vincoli imposti dai meccanismi fisici che ne determinano l'evoluzione, sostitutivi o aggiuntivi rispetto a quelli considerati appena sopra.

Ciò viene ben chiarito con riferimento al grafo orientato basato sulle connessioni in uscita da ogni nodo, già descritto con riferimento alla figura 2. È importante notare, infatti, che in questo caso, a differenza del caso appena trattato che ha condotto alla (15), gli archi uscenti connessi con un nodo mettono in relazione quest'ultimo con tutti i nodi interni del reticolo che, come appena precisato, rispondono a dinamiche di attivazione diverse da quelli rappresentanti i nodi sorgenti che descrivono le aree di cresta.

Per quanto riguarda gli archi uscenti da un nodo, come mostrato in (Fiorentino et al., 2016), assumendo che la rete di drenaggio naturale sia assimilabile ad un elemento di uno spazio di Hilbert, è possibile generalizzare la nozione di connettività uscente, il cui valor medio esprime l'insieme di tutte le possibili storie evolutive del reticolo idrografico, posto che ad ogni singola giunzione fluviale sia assegnato uno stato binario rappresentativo della particolare modalità erosiva. Ricorrendo a concetti di dinamica formale (Lind and Marcus, 1995), è possibile dimostrare che l'insieme dei percorsi evolutivi costituisce un insieme frattale la cui dimensione  $d$  è assunta governare le dinamiche del sistema. Ciò si traduce nella scrittura della relazione  $\sum_k p_k k^d = \langle k^d \rangle$ , la quale esprime una condizione sulla varianza generalizzata della connettività in uscita  $k$  dei nodi di un grafo. Tenendo

conto di quest'ultimo vincolo, il problema variazionale che descrive la nuova e più ricca organizzazione topologica della rete di drenaggio è retto dalla massimizzazione della funzione entropia

$$S_p = -\sum_k p_k \ln p_k, \quad (17)$$

la quale rappresenta una generalizzazione per le reti complesse dell'entropia informativa dei reticoli idrografici (Fiorentino et al., 1993), nel rispetto dei vincoli

$$\sum_k p_k = 1, \sum_k p_k \ln k = \langle \ln k \rangle \text{ e } \sum_k p_k k^d = \langle k^d \rangle, \quad (18)$$

dove la seconda condizione esprime il meccanismo di conflitto tra l'entropia dei nodi di un grafo orientato, definita dalla (17), e l'entropia  $S_r = -\sum_k r_k \ln r_k$  relativa alla distribuzione dei confinanti sorgenti di un nodo scelto a caso, definita dalla seconda delle (4).

Ricorrendo all'approssimazione continua, e sostituendo alla variabile discreta  $k$  la variabile  $t$  che definisce i tempi di percorrenza delle particelle fluide, l'applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange conduce ad una funzione densità di probabilità di tipo gamma generalizzata

$$p(t) = \frac{d}{b} \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\frac{t}{b}\right)^{zd-1} e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^d}, \quad (19)$$

dove  $\Gamma(z)$  è la funzione gamma di Eulero. Come riportato in (Singh and Fiorentino, 1992), la (19) si riduce immediatamente alla distribuzione Weibull descritta dalla (7), qualora si assuma  $z = 1$ . In linea con il principio di Jaynes, ciò equivale a vincolare il parametro di forma  $d$  e quello di scala  $b$  della distribuzione di probabilità alla risoluzione del seguente sistema retto dalle equazioni  $\langle t^d \rangle = b^d$  e  $\langle \ln t \rangle = \ln b - c/d$ , dove con  $c$  si è indicato la costante di Eulero-Mascheroni.

L'organizzazione di un reticolo idrografico naturale risulta quindi più complessa della struttura topologica del suo grafo isomorfo, la quale infatti ignora l'informazione relativa ai processi evolutivi dettati dalle dinamiche erosive che invece esercitano un forte controllo idrologico sulla morfologia di una rete di drenaggio naturale.

### 3. Applicazione dell'approccio variazionale ad un caso di studio

Le interpretazioni teoriche sviluppate nei capitoli precedenti, sia con riferimento alla stima delle probabilità di eccedenza delle aree contribuenti che al calcolo della funzione di larghezza, sono state applicate a sei bacini idrografici lucani. Di seguito, senza perdere di generalità, descriviamo i dettagli della procedura utilizzata per l'estrazione del reticolo idrografico con riferimento al fiume Agri, mentre i risultati ottenuti verranno discussi con riferimento a tutti i bacini esaminati.

#### 3.1 Leggi di scala per il fiume Agri e considerazioni finali

Tutte le analisi relative all'acquisizione dei dati geografici, nonché alla loro elaborazione e rappresentazione spaziale, sono state condotte con l'ausilio di Sistemi Informativi Geografici (GIS), i quali sono ormai diventati uno strumento tecnico sempre più indispensabile per una efficace politica di pianificazione territoriale, specie con riferimento alle metodologie di previsione del rischio idrogeologico. Tra i vari software GIS liberi da licenza, il programma GRASS QGIS si è affermato come una delle applicazioni più diffuse nella comunità tecnica e scientifica per l'analisi geografica avanzata. Tale programma fornisce una libreria di strumenti informatici particolarmente utili per l'analisi e la modellazione idro-geomorfologica (Neteler and Mitasova, 2008).

Com'è noto, un DTM (*Digital Terrain Model*) fornisce l'andamento della superficie del suolo priva degli elementi antropici e vegetazionali, ed è comunemente usato per la produzione di mappe topografiche del terreno attraverso l'integrazione di dati acquisiti per mezzo di differenti tecniche, tra cui il telerilevamento. Come accennato al paragrafo 1.2, un parametro fondamentale del modello è la dimensione caratteristica  $L$  della cella, che definisce il passo della griglia utilizzata per l'acquisizione dei dati. Infine, un valore altimetrico è assegnato ad ogni cella della griglia utilizzando una procedura di interpolazione bilineare delle quote del terreno rilevate.

Il DTM utilizzato in questo studio ha dimensione della cella pari ad  $L = 5$  m ed è disponibile al portale della Regione Basilicata ([http://rsdi.regione.basilicata.it/Catalogo/srv/ita/search?hl=ita/#\\_](http://rsdi.regione.basilicata.it/Catalogo/srv/ita/search?hl=ita/#_)).

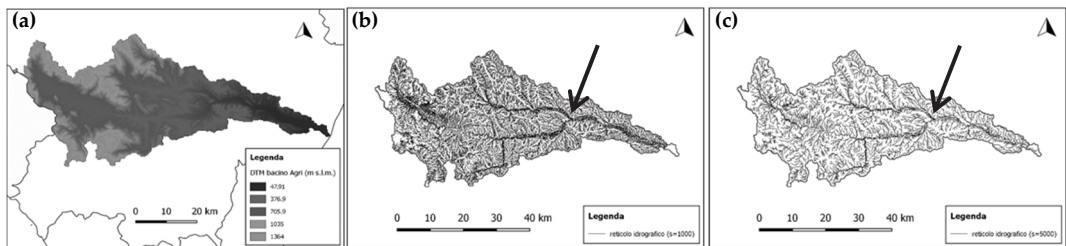
Per ogni bacino idrografico è stato importato il modello digitale del terreno da cui sono state estratte una mappa di elevazione priva di errori di misurazione (depressioni) ed una mappa di di-



reazione di flusso (comandi GRASS GIS: *r.fill.nulls* ed *r.fill.dir*). A titolo di esempio, in figura 4(a), si riporta il DTM pre-processato del bacino idrografico del fiume Agri.

L'estrazione del reticolo idrografico è stata effettuata a partire dalla mappa di elevazione pre-processata, la quale consente di generare sia mappe *raster* che vettoriali dei reticoli e delle direzioni di flusso. A tal fine, sono stati utilizzati in successione i due comandi GRASS GIS: *r.stream.extract* ed *r.stream.segment* (Jasiewicz and Mets, 2011). In particolare, il primo genera la mappa *raster* delle direzioni del flusso, mediante algoritmo di calcolo D8, selezionando un valore  $s$  per la soglia di accumulo del flusso (espressa in numero di celle aggregate), la quale definisce il grado di dettaglio della rete di drenaggio estratta. Il secondo comando consente invece di ottenere una mappa vettoriale del reticolo, ai cui segmenti fluviali, ciascuno identificato da un numero progressivo, viene assegnato un insieme di attributi che ne descrivono le principali caratteristiche plano-altimetriche.

Al fine di valutare gli effetti di scala che la scelta del valore di soglia ha sulle proprietà morfologiche del reticolo generato, abbiamo utilizzato due diversi valori della soglia di accumulo,  $s = 1000$  ed  $s = 5000$  celle, i cui relativi reticoli sono rappresentati rispettivamente nelle figure 4 (b) e (c).



**Fig. 4** – Mappa raster delle altimetrie nel bacino dell’Agri (a), Mappe vettoriali del reticolo idrografico del fiume Agri, con soglia di accumulo pari ad  $s = 1000$  celle (b) e soglia di accumulo pari ad  $s = 5000$  celle (c)

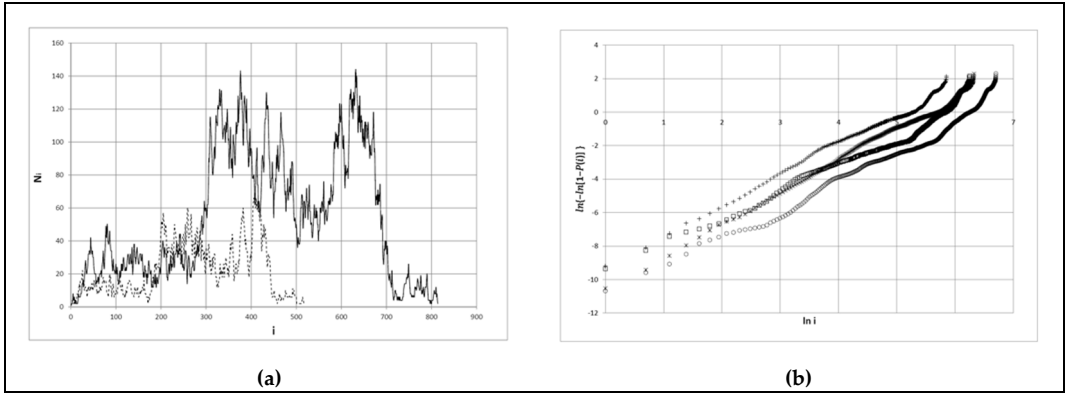
**Figure 4** – Raster elevation map of the Agri basin (a), Drainage direction maps of the Agri river, with a flow accumulation threshold  $s = 1000$  cells (b) and a flow accumulation threshold  $s = 5000$  cells (c)

Tra tutti i parametri fisici che il programma assegna ai segmenti fluviali, le informazioni necessarie per la ricostruzione della struttura gerarchica del reticolo, elaborata successivamente con l’ausilio di un algoritmo MATLAB, sono contenute nei due campi della tabella attributi: *s\_order*, che fornisce l’identificativo del nodo da cui il segmento fluviale trae origine, e *next\_order*, il quale fornisce il numero identificativo del nodo immediatamente a valle di questo. Gli altri descrittori morfometrici che la piattaforma GRASS GIS fornisce, quali ad esempio l’elevazione e la lunghezza dei singoli tratti fluviali, potranno comunque consentire elaborazioni statistiche di maggiore dettaglio della struttura plano-altimetrica del reticolo, le cui analisi sono rinviate a lavori futuri.

Per ciascun valore della soglia di accumulo sono state calcolate le funzioni di larghezza dei reticoli idrografici, i cui andamenti sono riportati in figura 5(a). Notiamo innanzitutto come la funzione di larghezza calcolata in corrispondenza della soglia  $s = 5000$  sia una copia in scala ridotta della funzione di larghezza con soglia 1000, confermando così l’ipotesi di auto-similarità statistica dei reticoli idrografici naturali, i cui processi di organizzazione risultano indipendenti dalla scala adottata.

In secondo luogo, per entrambe le soglie, in corrispondenza del tratto iniziale di reticolo, si può osservare una certa anomalia della funzione di larghezza, il cui sviluppo si discosta dal classico andamento di letteratura interpolabile con le usuali distribuzioni asimmetriche, Weibull inclusa. Tale difetto, riscontrato per altro anche per il fiume Basento ma non per gli altri bacini lucani, è probabilmente imputabile ad un errore sistematico nell’estrazione dei percorsi di drenaggio da parte dell’algoritmo utilizzato, il quale sovrastima l’aggregazione delle aree contribuenti nei tratti terminali del reticolo dove l’alveo fluviale presenta marcate caratteristiche alluvionali e/o decisi andamenti meandriiformi.

Al fine di investigare l’impatto che tale eventuale errore sistematico avrebbe sulla morfologia del reticolo, sono state analizzate le proprietà statistiche della funzione di larghezza spostando verso monte la sezione di chiusura del bacino di circa 30 km, sezione contrassegnata con una freccia nelle figure 4 (b) e (c). Per i quattro casi esaminati, vale a dire con soglia 1000 e 5000 e con o senza



**Fig. 5 - (a)** Funzione di larghezza, misurata in numero di nodi, per il fiume Agri al variare della soglia di accumulo:  $s = 1000$  celle (linea continua) ed  $s = 5000$  celle (linea tratteggiata); **(b)** Probabilità di non superamento della funzione di larghezza del fiume Agri: in ascissa  $\ln i$  ed in ordinata  $\ln\{-\ln[1 - P(i)]\}$ , dove con  $P(i)$  si è indicato la probabilità che il livello topologico assuma valori uguali o minori di  $i$ . Le quattro curve si riferiscono alle condizioni:  $s = 1000$  celle, con sezione di chiusura alla foce (cerchi);  $s = 1000$  celle, con anticipo della sezione di chiusura (asterischi);  $s = 5000$  celle, con sezione di chiusura alla foce (quadrati);  $s = 5000$  celle, con anticipo della sezione di chiusura (croci)

**Figure 5 - (a)** Width function of the Agri river (number of nodes for topological level) for two flow accumulation thresholds:  $s = 1000$  cells (solid line) and  $s = 5000$  cells (dashed line); **(b)** Cumulative distribution function  $P(i)$  of the topological level  $i$  of Agri river: the  $x$ - and  $y$ -axis measure  $\ln i$  and  $\ln\{-\ln[1 - P(i)]\}$ , respectively. The four curves refer to the conditions:  $s = 1000$  cells, with the outlet at the sea (circles);  $s = 1000$  cells, with the outlet a little behind (stars);  $s = 5000$  cells, with the outlet at the sea (squares);  $s = 5000$  cells, with the outlet a little behind (crosses)

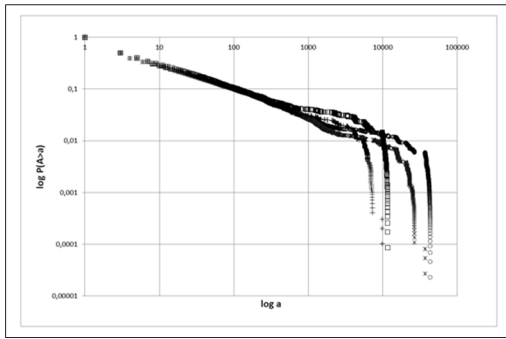
anticipo della sezione terminale, abbiamo riportato in figura 5(b) gli andamenti della probabilità di non superamento della funzione di larghezza, ricorrendo ad una particolare trasformazione della variabile che linearizza la distribuzione di probabilità Weibull. Si osserva che l'andamento delle quattro probabilità cumulate è all'incirca lineare, con coefficiente angolare (parametro di forma della Weibull) pari a 1.984, 1.900, 1.840 e 1.798, rispettivamente per soglia 1000 senza e con anticipo della sezione terminale, e soglia 5000 senza e con anticipo della sezione terminale. I valori del parametro di forma della funzione di larghezza così calcolati sono in linea con le stime dell'esponente  $d$  della Weibull, interpretato come dimensione frattale del reticolo idrografico, vedi Eq. (7). Ciò suggerisce che l'anomalia riscontrata nell'andamento della funzione di larghezza per un breve tratto iniziale del reticolo non ne influenza i risultati statistici, e pertanto l'errore sistematico risulta irrilevante ai fini della stima delle proprietà di scala dell'intero reticolo, il quale per l'appunto tende verso una robusta configurazione di equilibrio indipendente dai dettagli locali. Le elaborazioni effettuate con riferimento ai restanti bacini sono state pertanto condotte con riferimento al valore di una soglia pari a 1000 celle, e con sezione di chiusura del bacino idrografico alla foce. Uno schema riassuntivo dei valori dell'esponente di scala della funzione di larghezza è riportato in tabella 1.

Bacino idrografico	$d$	$\tau$
Bradano	1.921	0.50
Basento	1.760	0.38
Cavone	2.018	0.44
Agri	1.984	0.45
Sinni	2.067	0.47
Noce	1.801	0.43

**Tab. 1 -** Valori del parametro di forma  $d$  della funzione di larghezza e dell'esponente di scala  $\tau$  della probabilità di superamento dell'area cumulata per sei bacini lucani

**Table 1 -** Values of the shape parameter  $d$  of the width function and of the scaling exponent of the exceedance probability of total contributing area for six basins in the Basilicata region (Southern Italy)

Infine, il comportamento di scala del bacino idrografico con riferimento ai processi di aggregazione dell'area drenata è stato testato calcolando la probabilità di superamento delle aree contribuenti, il cui andamento in scala bilogarithmica, per entrambe le soglie di accumulo e con o senza anticipo della sezione di chiusura, è rappresentato in figura 6.



**Fig. 6** - Probabilità di eccedenza delle aree contribuenti per il fiume Agri. Le quattro curve si riferiscono alle condizioni:  $s = 1000$  celle, con sezione di chiusura alla foce (cerchi);  $s = 1000$  celle, con anticipo della sezione di chiusura (asterischi);  $s = 5000$  celle, con sezione di chiusura alla foce (quadrati);  $s = 5000$  celle, con anticipo della sezione di chiusura (croci)

**Figure 6** - Exceedance probability of total contributing area for the Agri river. Four curves refer to the conditions:  $s = 1000$  cells, with the outlet at the sea (circles);  $s = 1000$  cells, with the outlet a little behind (stars);  $s = 5000$  cells, with the outlet at the sea (squares);  $s = 5000$  cells, with the outlet a little behind (crosses)

Anche in questo caso, ad ulteriore conferma delle proprietà di auto-similarità delle reti di drenaggio naturali, il comportamento statistico del bacino idrografico risulta poco sensibile alla variazione della scala di dettaglio con la quale si osserva il reticolo, oltre che ad un eventuale anticipo della sezione di chiusura. Si osserva infatti che, nel tratto iniziale, tutte e quattro le curve decrescono linearmente in scala bilogarithmica con un coefficiente angolare (esponente di scala  $\tau$  della (6)) pressoché identico, il quale comunque non presenta forti variazioni anche estendendo l'intervallo di regime lineare a tutti i nodi del reticolo ad esclusione di quelli interessati dal *cut-off*. Quest'ultimo fenomeno, osservato per grandi valori dell'area contribuyente, è solitamente imputato alla dimensione finita del sistema reale che riduce drasticamente il numero di osservazioni (Amaral et al., 2000; Fiorentino et al., 2015). In particolare, i valori dell'esponente di scala  $\tau$  risultano pari a 0.50, 0.56, 0.40 e 0.51, rispettivamente per soglia 1000 senza e con anticipo della sezione terminale, e soglia 5000 senza e con anticipo della sezione di chiusura. Per tutti i bacini lucani, in tabella 1, sono riportati i valori dell'esponente di scala della probabilità di eccedenza delle aree contribuenti, con soglia di accumulo pari a 1000 celle ed avendo assunto come sezione di chiusura del bacino quella a mare.

In conclusione, le distribuzioni di probabilità riportate nelle figure 5 e 6 confermano con buona approssimazione le probabilità teoriche previste dall'approccio variazionale adottato. Le sorgenti di un reticolo idrografico, pensate come una frazione delle connessioni entranti nei nodi del grafo isomorfo, si organizzano secondo una legge di potenza che tiene conto soltanto di un vincolo energetico interno al sistema, in accordo con la conformazione geologica delle aree montane. Per contro, la distribuzione del grado in uscita dei nodi del grafo, la quale descrive la funzione di larghezza del reticolo idrografico isomorfo, presenta una struttura topologica più ricca e soggetta, oltre che al vincolo energetico strutturale, ad una ulteriore condizione la quale esprime, in maniera sintetica, i meccanismi erosivi che governano l'aggregazione delle giunzioni fluviali.

## Bibliografia

- Albert R., and Barabási A.-L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.* 74: 47-97.
- Albert R., Jeong H., and Barabási A.-L. (2000). Error and attack tolerance of complex networks. *Nature* 406: 378-382.
- Amaral L. A. N., Scala A., Barthélémy M., and Stanley H. E. (2000). Classes of small-world networks. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 97: 11149-11152.
- Bak P., Tang C., and Wiesenfeld K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise. *Phys. Rev. Lett.* 59(4): 381-384.
- Banavar J. R., Maritan A., and Rinaldo A. (1999). Size and form in efficient transportation networks. *Nature* 399: 130-132.
- Banavar J. R., Colaiori F., Flammini A., Giacometti A., Maritan A., and Rinaldo A. (1997). Sculpting of a fractal river basin. *Phys. Rev. Lett.* 78: 4522-4525.
- Barabási A.-L. (2012). The network takeover. *Nature Physics* 8: 14-16.
- Barabási A.-L., and Albert R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science* 286: 509-512.
- Bianconi G. (2007). A statistical mechanics approach for scale-free networks and finite-scale networks. *Chaos* 17: 026114.

- Dorogovtsev S. N., and Mendes J. F. F. (2001). Scaling properties of scale-free evolving networks: continuous approach. *Phys. Rev. E* 63: 056125.
- Dorogovtsev S. N., and Mendes J. F. F. (2002). Evolution of networks. *Advances in Physics* 51: 1079-1187.
- Dorogovtsev S. N., Goltsev A. V., and Mendes J. F. F. (2008). Critical phenomena in complex networks. *Rev. Mod. Phys.* 80: 1275-1335.
- Fiorentino M., Claps P., and Singh V. P. (1993). An entropy-based morphological analysis of river basin networks. *Water Resour. Res.* 29: 1215-1224.
- Fiorentino M., Oliveto G., and Rossi A. (2002). Alcuni aspetti del controllo energetico ed idrologico sulla geometria delle reti e delle sezioni fluviali Parte prima: controllo idrologico. Atti del 28° Convegno Nazionale di *Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Vol. III, 71-78. EdiBios – Cosenza. ISBN 88-7740-340-3.
- Fiorentino M., Margiotta M. R. and Sanchirico A. (2015). Entropia e conflitto di entropia nelle serie storiche di dati idrologici. In G. Frega (a cura di) Atti del 36° Corso di Aggiornamento in *Tecniche per la Difesa dall’Inquinamento*, 303-318. EdiBios – Cosenza. ISBN 978-88-97181-39-2.
- Fiorentino M., Margiotta M. R. and Sanchirico A. (2016). Il comportamento evolutivo delle reti fluviali complesse. In G. Frega (a cura di) Atti del 37° Corso di Aggiornamento in *Tecniche per la Difesa dall’Inquinamento*, 273-291. EdiBios – Cosenza. ISBN 978-88-97181-47-7.
- Jasiewicz J. Ł., and Metz M. (2011). A new GRASS GIS toolkit for Hortonian 1 Supplement: List of case 2 analysis of drainage networks[J]. *Computer & Geosciences* 37(8): 1162-1173.
- Jaynes E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.* 106: 620-630.
- Lind L. and Marcus B. (1995). An introduction to symbolic dynamics and coding. Cambridge Univ. Press, New York.
- Mandelbrot B. B. (1983). The fractal geometry of nature. W. H. Freeman, New York.
- Maritan A., Rinaldo A., Rigon R., Giacometti A., and Rodríguez-Iturbe I. (1996). Scaling law for river networks. *Phys. Rev. E* 53: 1510-1515.
- Neteler M., and Mitasova H. (2008). Open Source GIS: A GRASS GIS Approach. Springer, New York.
- Newman M. E. J., Strogatz S. H., and Watts D. J. (2001). Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E* 64: 02618.
- O’Callaghan J. F., and Mark D. M. (1984). The extraction of drainage networks from digital elevation data. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 28: 328-344.
- Park J., and Newman M. E. J. (2004). The statistical mechanics of networks. *Phys. Rev. E* 70: 066117.
- Perron J. T., Dietrich W. E., and Kirchner J. W. (2008). Controls on the spacing of first-order valley. *J. Geophys. Res.* 113: F04016.
- Reinhardt L., and Ellis M. A. (2015). The emergence of topographic steady state in perpetually dynamic self-organized critical landscape. *Water Resour. Res.* 51: 4986-5003.
- Rodríguez-Iturbe I., and Rinaldo A. (1997). Fractal river basins: chance and self-organization. Cambridge Univ. Press, New York.
- Sanchirico A., and Fiorentino M. (2008). Scale-free networks as entropy competition. *Phys. Rev. E* 78: 046114.
- Shannon C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. Journal* 27: 379-423.
- Shreve R. L. (1966). Statistical law of stream numbers. *Journal of Geology* 74: 17-37.
- Sing V. P., and M. Fiorentino (1992). A historical perspective of entropy applications in water resources, in *Entropy and energy dissipation in water resources*, V. P. Singh, and M. Fiorentino, eds. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 155.
- Troutman B. M., and Karlinger M. R. (1985). Unit hydrograph approximations assuming linear flow through topologically random channel networks. *Water Resour. Res.* 21: 743-754.
- Turcotte D. L. (1997). Fractals and chaos in geology and geophysics. Cambridge Univ. Press., New York.



ISSN 2282-5517

ISBN 978-88-97181-75-0



9 788897 181750

€ 50,00